

Persistence homologique

Francis Lazarus

18 mars 2008

1 Motivation

La notion de persistence homologique apparaît dans les articles de Robins [5] puis de Edelsbrunner et al. [3] dans le cadre de la théorie de l'approximation. Dans ces articles et dans la plupart de ceux qui ont suivis sur ce thème [2, 4, 1] l'aspect homologique tend à effacer le caractère purement algébrique de la persistence. Zomorodian et Carlsson [6] en donne une vision certes algébrique, mais au détriment cette fois d'une clarté d'exposition dans son application au calcul homologique. Cette vision repose en effet sur des outils assez lourds d'algèbre commutative. La section 4 du présent document restitue cependant l'essentiel de cette vision par soucis de complétude. L'objectif de ce document est de donner un exposé simple de la persistence qui préserve la distinction entre aspects algébrique et homologique. Il semble que les algorithmes y gagnent en clarté. À cet égard, le traitement des transpositions dans les filtrations de complexes simpliciaux, comme exposé à la section 3.3, semble plus facile d'accès que dans l'article original [2].

On se donne une filtration d'un complexe simplicial K :

$$\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = K$$

Cette filtration induit une suite de morphismes en homologie :

$$H_*(K_1) \rightarrow \dots \rightarrow H_*(K_n)$$

où chaque flèche est induite par l'inclusion. Clairement, cette suite de morphismes est un invariant plus riche pour la filtration que la simple collection des groupes d'homologie. On pourra considérer par exemple deux filtrations de longueur 2 du tore commençant par un cycle contractile ou non.

En travaillant avec des coefficients dans un corps on obtient ainsi une chaîne d'applications linéaires. On définit de manière naturelle une notion de morphismes entre deux telles chaînes. La question se pose alors de classifier les chaînes à isomorphisme près. On va montrer que la notion d'intervalle de persistance fournit un invariant complet.

2 Classification des chaînes d'applications linéaires

2.1 Décomposition canonique

On se donne une chaîne d'applications linéaires de longueur n entre des espaces vectoriels E_i de dimensions finies sur un corps F donné :

$$E_1 \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_n} E_{n+1} \quad (1)$$

Pour tout $(i, j) \in [1, n+1]^2$ on définit $\phi_{i,j} : E_i \rightarrow E_j$ comme la composition des ϕ_k entre E_i et E_j . Plus précisément, on pose

- $\forall i \in [1, n] : \phi_{i,i} = Id_{E_i}$
- $\forall 1 \leq i < j \leq n+1 : \phi_{i,j} = \phi_{i+1,j} \circ \phi_i$ et $\phi_{j,i} = 0$.

Exemple 2.1 On note $F(i, j)$ la chaîne

$$\underbrace{0 \rightarrow \dots \rightarrow 0}_{(i-1) \times 0} \rightarrow \underbrace{F^1 \xrightarrow{Id} \dots \xrightarrow{Id} F^1}_{(j-i+1) \times F^1} \rightarrow \underbrace{0 \rightarrow \dots \rightarrow 0}_{(n-j+1) \times 0}$$

C'est-à-dire avec les notations ci-dessus : E_k est l'espace de dimension 1 sur F pour $k \in [i, j]$ et 0 sinon, tandis que ϕ_k est l'identité pour $k \in [i, j[$ et l'application nulle sinon.

Le résultat principal de cette section est une décomposition canonique des chaînes d'applications linéaires.

Théorème 2.2 Pour toute chaîne (E_i, ϕ_i) de longueur n de la forme (1), il existe un unique multi-ensemble d'intervalles, I , tel que (E_i, ϕ_i) est isomorphe à la somme directe

$$\bigoplus_{[i,j] \in I} F(i, j) \quad (2)$$

où chaque intervalle $[i, j]$ apparaît dans cette somme avec sa multiplicité dans I . Les intervalles de I sont appelés intervalles de persistance de (E_i, ϕ_i) .

Dans cette somme directe l'espace d'indice k est la somme directe des espaces – ici 0 ou F^1 – de même indice dans les $F(i, j)$. Les applications linéaires sont également obtenus par somme directe des applications – ici 0 ou l'identité – de même indice.

Soit I le multi-ensemble d'intervalles de persistance du théorème. On note $n_{i,j}$ la multiplicité de l'intervalle de persistance $[i, j]$ dans I . Pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$ on pose $\beta_{i,j} = \text{rang}(\phi_{i,j})$.

Lemme 2.3 Pour tout $1 \leq i < j \leq n+1 : n_{i,j} = \beta_{i,j} - \beta_{i-1,j} - (\beta_{i,j+1} - \beta_{i-1,j+1})$

Preuve : Clairement, chaque $F(k, \ell)$ de la décomposition contribue pour 1 dans $\beta_{i,j}$ si et seulement si $[i, j] \subset [k, \ell]$. Par suite, $\beta_{i,j} - \beta_{i-1,j}$ compte le nombre d'intervalles de persistance de la forme $[i, \ell]$ avec $\ell \geq j$. Soit encore $\beta_{i,j} - \beta_{i-1,j} = \sum_{\ell \geq j} n_{i,\ell}$. On en déduit le lemme. \square

Le lemme montre l'unicité du multi-ensemble d'intervalles dans le théorème. L'existence, montrée ci-dessous, repose sur la notion de base compatible.

2.2 Bases compatibles

Pour $x \in E_i$, on pose

$$x(j) = \begin{cases} \phi_{i,j}(x) & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 2.4 Une base compatible pour la chaîne (1) est la donnée d'une famille $X \subset \bigcup_i E_i$, l'union étant considérée comme disjointe, telle que pour $1 \leq i \leq n+1$ la famille

$$\{x(i) \mid (x \in X) \wedge (x(i) \neq 0)\}$$

est une base de E_i .

Par la suite on utilise par commodité la fonction d'activation $a : X \rightarrow [0, n]$ telle que $\forall x \in X : x \in E_{a(x)}$.

Proposition 2.5 Toute chaîne du type (1) admet une base compatible.

Preuve : On procède par récurrence sur la longueur de la chaîne. Pour une longueur nulle (E_1 seul est donné), une base quelconque de E_1 fournit une base compatible. On considère une chaîne du type (1) de longueur $n > 0$ et on suppose que X est une base compatible pour la sous-chaîne de longueur $n-1$:

$$E_1 \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_{n-1}} E_n \quad (3)$$

On définit de manière récursive des bases compatibles $X_0 = X, X_1, \dots$ pour (3). Le but est d'obtenir une base compatible X_k , pour $k = |X|$, dont les éléments s'envoient dans E_{n+1} soit sur 0 soit sur une sous-famille libre de E_{n+1} . Pour cela on commence par ordonner les éléments x_0, x_1, \dots de X de manière compatible avec l'activation, i.e. $i < j \implies a(x_i) \leq a(x_j)$. On suppose avoir construit X_{i-1} pour un $i \geq 0$ avec un ordre sur ses éléments y_0, y_1, \dots compatible avec l'activation.

- Si $y_i(n+1)$ ($= \phi_n(y_i(n))$) est nul ou linéairement indépendant de $\{y_j(n+1)\}_{j < i}$ alors on pose $X_i = X_{i-1}$,
- sinon, on peut écrire $y_i(n+1) = \sum_{j < i} \lambda_j y_j(n+1)$ et on pose $y'_i = y_i - \sum_{j < i} \lambda_j y_j(n+1)$ et

$$X_i = X_{i-1} \setminus \{y_i\} \cup \{y'_i\}$$

Clairement X_i est compatible pour (3) : les familles de la définition 2.4 pour X_i sont obtenues par des changements de bases élémentaires à partir des familles correspondantes pour X_{i-1} . On définit de manière évidente l'ordre sur X_i à partir de l'ordre sur X_{i-1} .

On obtient ainsi une base compatible X_k de (3) pour $k = |X|$ et on vérifie que les éléments non nuls de $\{x(n+1)\}_{x \in X_k}$ forment une famille libre dans E_{n+1} .

Il reste à compléter X_k par une base d'un supplémentaire de $\phi_n(E_n)$ pour obtenir une base compatible pour (1). \square

Définition 2.6 À tout élément x d'une base compatible, on associe son intervalle de persistance $\{i \mid x(i) \neq 0\}$.

Lemme 2.7 *Les intervalles de persistance des éléments d'une base compatible coïncident avec les intervalles de persistance du théorème 2.2.*

Preuve : Il suffit d'adapter la preuve du lemme 2.3 en définissant cette fois n_{ij} comme la multiplicité de l'intervalle $[i, j]$ parmi les intervalles de persistance des éléments d'une base compatible. \square

Preuve de l'existence de la décomposition canonique du théorème 2.2 : Notons tout d'abord qu'une décomposition canonique admet une base compatible formée, pour chaque $F(i, j)$ de la décomposition, d'un générateur de F^1 dans l'espace d'indice i . L'intervalle de persistance d'un tel générateur est précisément $[i, j]$.

Soit une chaîne de la forme (1). Par la proposition 2.5, on peut choisir une base compatible X pour cette chaîne. Soit I le multi-ensemble des intervalles de persistance des éléments de X et soit Y une base compatible de la décomposition canonique (2) construite comme ci-dessus. On note F_i l'espace d'indice i dans la décomposition canonique et on considère une bijection $f : X \rightarrow Y$ qui respecte les intervalles de persistance (cf. lemme 2.7). Cette bijection induit pour chaque i un morphisme $f_i : E_i \rightarrow F_i$ obtenu en envoyant la base de E_i associée à X (cf. définition 2.4) sur la base correspondante de F_i via $f : f_i(x(i)) = f(x)(i)$. Clairement les f_i forment une application de chaîne et l'inverse de f induit l'application inverse. \square

3 Persistance des filtrations de complexes simpliciaux

On se donne un complexe simplicial K et une filtration \mathcal{K} :

$$\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = K \quad (4)$$

de sorte que $K_i = K_{i-1} \cup \sigma_i$ où σ_i est un simplexe de K . Une filtration équivaut ici à se donner un ordre sur les simplexes de K dont les préfixes sont des sous-complexes de K . On considère l'homologie sur un corps F , de sorte que les $H(K_i)$ sont des espaces vectoriels. Selon l'usage on note $C(K_i)$ (resp. $Z(K_i)$, resp. $B(K_i)$) l'espace des chaînes (resp. cycles, resp. des bords) de K_i . On omet volontairement la dimension pour ne pas alourdir les notations. On peut soit la rétablir partout où elle est utile, soit considérer que les espaces $C(K_i), Z(K_i), B(K_i), H(K_i)$ sont des sommes directes de ces espaces usuellement pris dans chaque dimension.

En considérant l'application bord comme un endomorphisme de $C(K_i)$, on obtient par la formule du rang d'une application linéaire :

$$\dim C(K_i) = \dim Z(K_i) + \dim B(K_i)$$

On en déduit en retranchant à cette équation celle pour K_{i-1} , et en notant que $\dim C(K_i)$ est le nombre de simplexes de K_i :

$$(\dim Z(K_i) - \dim Z(K_{i-1})) + (\dim B(K_i) - \dim B(K_{i-1})) = 1$$

Les deux termes entre parenthèses étant positifs ou nuls on a pour tout i ,

1. ou bien $\dim Z(K_i) = \dim Z(K_{i-1}) + 1$ et $B(K_i) = B(K_{i-1})$,

2. ou bien $Z(K_i) = Z(K_{i-1})$ et $\dim B(K_i) = \dim B(K_{i-1}) + 1$.

Définition 3.1 On dira que l'indice i (ou le simplexe σ_i) dans la filtration \mathcal{K} est positif dans le premier cas, et négatif dans le second. L'ensemble des indices positifs et négatifs de \mathcal{K} sont respectivement notés $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{N}(\mathcal{K})$.

Lemme 3.2 Les conditions suivantes sont équivalentes

- σ_i est positif,
- σ_i est dans le support d'un cycle $z \in Z(K_i)$ et $Z(K_i) = Z(K_{i-1}) \oplus Fz$,
- $\partial\sigma_i \in B(K_{i-1})$,

La preuve est laissée à titre d'exercice. Notons que dans tous les cas on a

$$B(K_i) = B(K_{i-1}) + F\partial\sigma_i, \quad (5)$$

la somme étant directe si et seulement si σ_i est négatif.

Les inclusions de la filtration (4) induisent une chaîne de longueur n entre les groupes d'homologie de chaque complexe de la filtration :

$$H(K_1) \rightarrow \dots \rightarrow H(K_n) \rightarrow 0 \quad (6)$$

Lemme 3.3 Tout intervalle de persistance de (6) est de la forme $[i, j[$ avec

$$(i, j) \in \mathcal{P}(\mathcal{K}) \times (\mathcal{N}(\mathcal{K}) \cup \{n+1\}).$$

De plus, tout indice positif (resp. négatif) est la borne inférieure (resp. supérieure) d'un unique intervalle de persistance de multiplicité un.

On notera que $n+1$ n'est pas considéré comme un indice négatif et qu'en général plusieurs intervalles peuvent se terminer en $n+1$.

Preuve : On note n_i (resp. m_i) le nombre d'intervalles de persistance de (6) commençant (resp. se terminant) en i . On note également β_i le rang du morphisme induit $H(K_i) \rightarrow H(K_{i+1})$ par l'inclusion $K_i \subset K_{i+1}$. D'après la forme canonique (2), la dimension de $H(K_i)$ est le nombre d'intervalles de persistance contenant i . En partitionnant ces intervalles en ceux qui commencent en i et les autres, on obtient :

$$\dim H(K_i) = n_i + \beta_{i-1}$$

de même, en séparant ces intervalles en ceux qui se terminent en i et les autres, on obtient :

$$\dim H(K_i) = m_i + \beta_i$$

Puisque $B(K_i) \subset B(K_{i+1}) \subset Z(K_i) \subset Z(K_{i+1})$, l'image de $H(K_i) = Z(K_i)/B(K_i)$ dans $H_*(K_{i+1}) = Z(K_{i+1})/B(K_{i+1})$ est isomorphe à $Z(K_i)/B(K_{i+1})$, d'où

$$\beta_i = \dim Z(K_i) - \dim B(K_{i+1})$$

On en déduit, avec $\dim H(K_i) = \dim Z(K_i) - \dim B(K_i)$, que

$$n_i = \dim Z(K_i) - \dim Z(K_{i-1}) \quad \text{et} \quad m_i = \dim B(K_{i+1}) - \dim B(K_i)$$

Ces deux égalités permettent de conclure, compte tenu de la définition des indices positifs et négatifs. \square

Définition 3.4 *Le lemme précédent permet de définir les applications naissance et mort*

$$N : \mathcal{N}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{K}) \quad \text{et} \quad M : \mathcal{P}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{K}) \cup \{n+1\}$$

telles que pour tout indice i positif et tout indice j négatif les intervalles $[i, M(i)[$ et $[N(j), j[$ sont des intervalles de persistances de (6). On appellera intervalles de persistance de la filtration \mathcal{K} les intervalles de persistance de la chaîne induite (6).

3.1 Famille compatible des bords

Notre objectif est de calculer les signes des simplexes et les intervalles de persistance de la filtration (4) de manière efficace. On introduit pour cela la notion de famille compatible des bords.

Définition 3.5 *Une famille compatible des bords pour la filtration (4) est une famille $\{x_j\}_{j \in J}$, $J \subset [1, n]$, de cycles de K vérifiant les conditions*

1. $\forall i \in [1, n], \{x_j \mid (j \in J) \wedge (j \leq i)\}$ est une base de $B(K_i)$,
2. Notons $\nu(j)$ l'indice maximal des simplexes du support de x_j . Alors $\forall i, k \in J, i \neq k \implies \nu(i) \neq \nu(k)$.

Lemme 3.6 *La fonction ν définie ci-dessus coïncide avec la fonction N de la définition 3.4.*

Preuve : La condition 1 ci-dessus et la note suivant l'équation (5) montrent que $J = \mathcal{N}(\mathcal{K})$. Le lemme 3.2 montre également que pour tout $j \in J$, $\nu(j) \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$. On définit des cycles $z_i \in Z(K_i)$ pour tout $i \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ comme suit :

- Si $i \in \mathcal{P}(\mathcal{K}) \setminus \nu(J)$, on choisit z_i tel que $Z(K_i) = Z(K_{i-1}) \oplus Fz_i$ (cf. lemme 3.2).
- Sinon, $i = \nu(j)$ pour un certain $j \in J$ et on pose $z_{\nu(j)} = x_j$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les classes d'homologie des z_i (pris dans $H(K_i)$) forment une base compatible pour (6) au sens de la définition 2.4 et que les intervalles de persistance des $z_{\nu(j)}$ sont de la forme $[\nu(j), j[$. \square

Proposition 3.7 *Toute filtration admet une famille compatible des bords.*

La preuve est donnée par l'algorithme qui suit.

Exercice 3.8 *Montrer que $N(i+1) = i$ implique que σ_i est une face de σ_{i+1} .*

3.2 Algorithme

Le lemme 3.6 ci-dessus indique qu'il suffit de construire une famille compatible des bords pour calculer le signe de chaque simplexe et les intervalles de persistance d'une filtration.

La construction se fait par récurrence sur la taille n de la filtration. Le cas $n = 1$ est trivial puisque l'unique simplexe de la filtration est nécessairement positif. Supposons donc avoir construit une famille compatible des bords $\{x_j\}_{j \in J}$ pour la sous-filtration \mathcal{K}' :

$$\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_{n-1}$$

On désigne par $N : J \rightarrow \mathcal{P}(K')$ la fonction de naissance associée. Supposons pouvoir calculer une décomposition du bord de σ_n sous la forme

$$\partial\sigma_n = \sum_{j \in J} \alpha_j x_j + x_n \quad (7)$$

de sorte que

1. ou bien x_n est nul,
2. ou bien l'indice maximal des simplexes du support de x_n n'est pas dans $N(J)$.

Si x_n est nul alors $B(K_n) = B(K_{n-1})$ (cf. (5)) et $\{x_j\}_{j \in J}$ reste une famille compatible des bords pour \mathcal{K} . Sinon, c'est le cas pour $\{x_j\}_{j \in J} \cup \{x_n\}$.

Notons que toute famille compatible des bords forme une base échelonnée de vecteurs sur la base canonique des simplexes (cf. condition 2 de la définition 3.5). La décomposition (7) peut donc s'obtenir par la méthode du pivot de Gauss décrite par le pseudo-code suivant :

```

y := ∂σn
i := indice maximal des simplexes du support de y
Tant que ( (y ≠ 0) ∧ (i ∈ N(J)) )
  j := N-1(i)
  α := coefficient de σi dans y
  β := coefficient de σi dans xj
  y := y - (α/β)xj
  i := indice maximal des simplexes du support de y
Fin tant que
\* y contient xn à la sortie de la boucle *\

```

Analyse de la complexité On stocke chaque cycle x_j par la liste des coefficients de ses simplexes dans un tableau indexé par les n simplexes de K . On représente la fonction N par un tableau de taille n ; la case j contient $N(j)$ si σ_j est négatif et 0 sinon. On stocke également la fonction inverse N^{-1} ($= M$) dans un tableau de taille n . Le calcul de x_n dans l'algorithme précédent prend un temps $O(n^2)$. On en déduit

Proposition 3.9 *Le calcul d'une famille compatible des bords et de la fonction N pour une filtration de longueur n requiert un temps $O(n^3)$ sur une machine F -RAM (i.e. les opérations élémentaires $+$, $-$, $*$, \div sur F prennent un temps constant). En particulier, on peut calculer les intervalles de persistance de la filtration dans le même temps.*

3.3 Transposition dans une filtration

Soient σ_i et σ_{i+1} deux simplexes de la filtration \mathcal{K} considérée tels que σ_i n'est pas une face de σ_{i+1} . Alors on peut former une nouvelle filtration \mathcal{K}' de K en transposant les ordres de σ_i et σ_{i+1} . On note

$$\emptyset = K'_{-1} \subset K'_0 \subset K'_1 \subset \dots \subset K'_n = K$$

cette nouvelle filtration et $\sigma'_0, \sigma'_1, \dots, \sigma'_n$ ses simplexes. On a ainsi

- $\sigma'_j = \sigma_j$ si $j \neq i, i+1$,
- $\sigma'_i = \sigma_{i+1}$ et $\sigma'_{i+1} = \sigma_i$,

de sorte que

- $K'_j = K_j$ si $j \neq i$,
- $K'_i = K_{i-1} \cup \sigma_{i+1}$.

L'objectif est ici de calculer rapidement les intervalles de persistance de la filtration \mathcal{K}' à partir de ceux de \mathcal{K} . On note $M : \mathcal{P}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{K}) \cup \{n+1\}$ la fonction de mort pour \mathcal{K} et $N' : \mathcal{N}(\mathcal{K}') \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{K}')$ la fonction de naissance pour \mathcal{K}' . On suppose disposer d'une famille compatible des bords $\{x_j\}_{j \in \mathcal{N}(\mathcal{K})}$.

σ_i et σ_{i+1} sont positifs : En particulier $B(K'_i) = B(K_i)$, d'où $B(K_j) = B(K'_j)$ pour tout $j \in [1, n]$. La famille $\{x_j\}_{j \in \mathcal{N}(\mathcal{K})}$ vérifie trivialement la condition 1) de la définition 3.5.

Cas 1 Si $M(i) = n+1$ ou si $M(i+1) = n+1$, alors $\{x_j\}_{j \in \mathcal{N}(\mathcal{K})}$ vérifie également la condition 2) et est donc une base compatible des bords pour \mathcal{K}' . Dans le cas particulier où $M(i) = n+1$ et $M(i+1) < n+1$ on peut écrire

$$x_{M(i+1)} = \alpha \sigma_{i+1} + \beta \sigma_i + \sum_{j < i} \beta_j \sigma_j \text{ avec } \alpha \neq 0. \quad (8)$$

Si $\beta = 0$ alors $N'(M(i+1)) = i$ (puisque $\sigma'_i = \sigma_{i+1}$), sinon $N'(M(i+1)) = i+1$ de sorte que $N' = N$.

Cas 2 Sinon $M(i) < n+1$ et $M(i+1) < n+1$. On peut alors écrire, en plus de l'équation (8),

$$x_{M(i)} = \gamma \sigma_i + \sum_{j < i} \gamma_j \sigma_j \text{ avec } \gamma \neq 0$$

On pose alors

$$x' = x_{M(i+1)} - \frac{\beta}{\gamma} x_{M(i)} = \alpha \sigma_{i+1} + \sum_{j < i} \beta'_j \sigma_j$$

Cas 2.a Si $M(i) < M(i+1)$ ou si $\beta = 0$, on pose $x'_{M(i+1)} = x'$ et $x'_j = x_j$ pour $j \neq M(i+1)$. On vérifie que $\{x'_j\}_{j \in \mathcal{N}(\mathcal{K})}$ est une famille compatible des bords pour \mathcal{K}' . En particulier $N'(M(i+1)) = i$ et $N'(M(i)) = i+1$.

Cas 2.b Sinon $M(i) > M(i+1)$ et $\beta \neq 0$. On pose cette fois $x'_{M(i)} = x'$ et $x'_j = x_j$ pour $j \neq M(i)$. On vérifie à nouveau que $\{x'_j\}_{j \in \mathcal{N}(\mathcal{K})}$ est une famille compatible des bords pour \mathcal{K}' . En particulier $N' = N$.

σ_i est négatif et σ_{i+1} est positif : En particulier $\partial \sigma_{i+1} \in B(K_i)$. On peut donc écrire sur la base $\{x_j\}_{j \leq i}$ de $B(K_i)$:

$$\partial \sigma_{i+1} = \sum_{j \leq i} \alpha_j x_j$$

Cas 1 Si $\alpha_i = 0$ alors $\partial \sigma_{i+1} \in B(K_{i-1})$, d'où

$$B(K'_i) = B(K_{i-1}) + \langle \partial \sigma_{i+1} \rangle = B(K_{i-1})$$

On obtient ainsi une famille compatible des bords $\{x'_j\}_{j \in \mathcal{N}(\mathcal{K}')}$ pour \mathcal{K}' en posant

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\mathcal{K}') = \mathcal{N}(\mathcal{K}) \setminus \{i\} \cup \{i+1\} \\ \forall j \in \mathcal{N}(\mathcal{K}') \setminus \{i+1\}, x'_j = x_j \\ x'_{i+1} = x_i \end{cases}$$

Cas 2 Sinon, $\alpha_i \neq 0$, d'où

$$B(K'_i) = B(K_{i-1}) + \langle \partial\sigma_{i+1} \rangle = B(K_{i-1}) \oplus \langle x_i \rangle = B(K_i)$$

d'où $B(K_j) = B(K'_j)$ pour tout $j \in [1, n]$. On en déduit que $\{x_j\}_{j \in \mathcal{N}(\mathcal{K})}$ reste une famille compatible des bords pour \mathcal{K}' .

σ_i est positif et σ_{i+1} est négatif : On a donc

$$\begin{aligned} B(K_i) &= B(K_{i-1}) \text{ et} \\ B(K_{i+1}) &= B(K_i) \oplus \langle \partial\sigma_{i+1} \rangle = B(K_{i-1}) \oplus \langle \partial\sigma_{i+1} \rangle \end{aligned}$$

On en déduit

$$B(K'_i) = B(K_{i-1}) + \langle \partial\sigma_{i+1} \rangle = B(K_{i+1}) = B(K'_{i+1})$$

On obtient ainsi une famille compatible des bords $\{x'_j\}_{j \in \mathcal{N}(\mathcal{K}')}$ pour \mathcal{K}' en posant

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\mathcal{K}') = \mathcal{N}(\mathcal{K}) \setminus \{i+1\} \cup \{i\} \\ \forall j \in \mathcal{N}(\mathcal{K}') \setminus \{i\}, x'_j = x_j \\ x'_i = x_{i+1} \end{cases}$$

σ_i et σ_{i+1} sont négatifs : On écrit sur la base $\{x_j\}_{j \leq i+1}$ de $B(K_{i+1})$:

$$\partial\sigma_{i+1} = \alpha x_{i+1} + \beta x_i + \sum_{j < i} \gamma_j x_j$$

avec $\alpha \neq 0$ puisque σ_{i+1} est négatif. Je pose

$$x'_i = \alpha x_{i+1} + \beta x_i \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathcal{N}(\mathcal{K}) \setminus \{i, i+1\}, x'_j = x_j$$

Cas 1 Si $N(i+1) > N(i)$ ou si $\beta = 0$, je pose également

$$x'_{i+1} = x_i$$

Cas 2 Sinon, $N(i+1) < N(i)$ et $\beta \neq 0$ et je pose

$$x'_{i+1} = x_{i+1}$$

Dans les deux cas on a

$$\begin{aligned} B(K'_i) &= B(K_{i-1}) \oplus \langle \partial\sigma_{i+1} \rangle = B(K_{i-1}) \oplus \langle x'_i \rangle \text{ et} \\ B(K'_{i+1}) &= B(K_{i+1}) = B(K_{i-1}) \oplus \langle x'_i, x'_{i+1} \rangle = B(K'_i) \oplus \langle x'_{i+1} \rangle \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\{x'_j\}_{j \in \mathcal{N}(\mathcal{K}')}$ vérifie la condition 1) de la définition 3.5. On laisse au lecteur le soin de vérifier la condition 2) dans les deux cas.

Les figures 1 à 5 illustrent les différents cas de transposition. Les intervalles de persistance issus de i ou $i+1$ sont représentés en très plein pour la filtration \mathcal{K} et en traits pointillés pour \mathcal{K}' . Chaque cas est également illustré par un exemple simple de filtration, les indices des différents simplexes indiquant leur ordre dans la filtration \mathcal{K} .

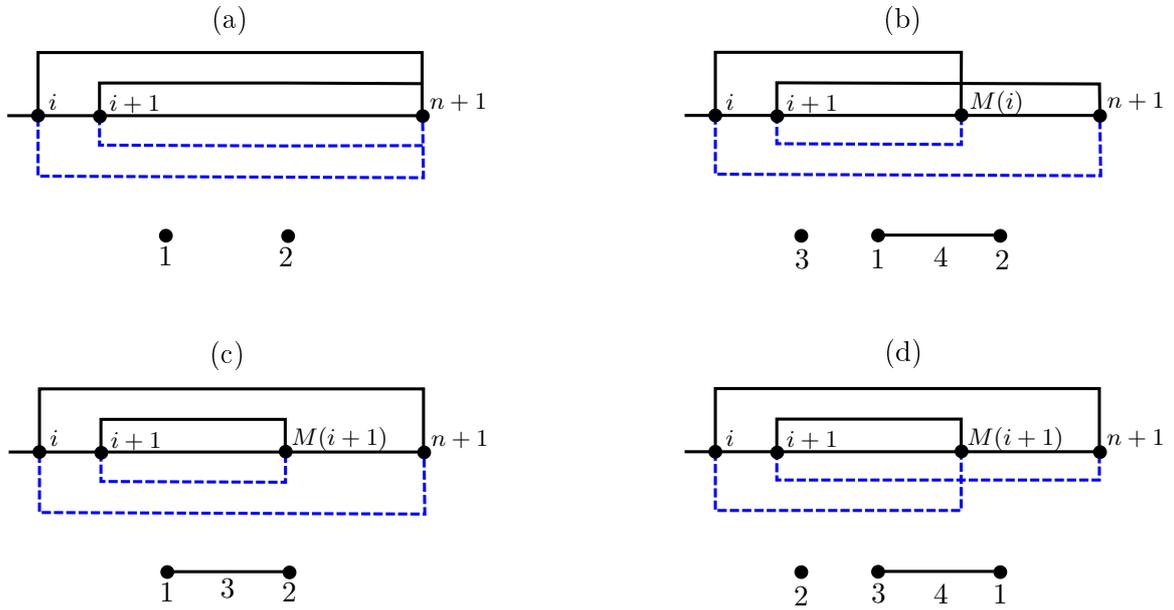


FIG. 1 – Cas 1 lorsque σ_i et σ_{i+1} sont positifs. (a) : $M(i) = M(i+1) = n+1$ et $i = 1$ sur l'exemple. (b) : $M(i) < n+1, M(i+1) = n+1$ et $i = 2$ sur l'exemple. (c) : $M(i) = n+1, M(i+1) < n+1$ et $\beta \neq 0$ et $i = 1$ sur l'exemple. (d) : $M(i) = n+1, M(i+1) < n+1$ et $\beta = 0$ et $i = 2$ sur l'exemple.

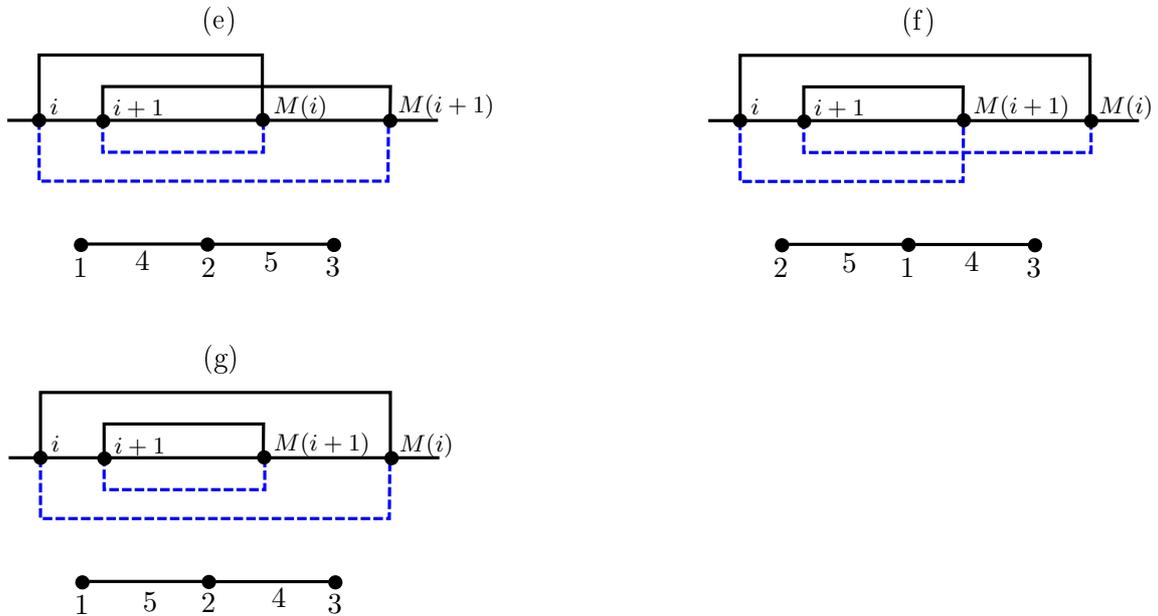


FIG. 2 – Cas 2 lorsque σ_i et σ_{i+1} sont positifs. $i = 2$ sur tous les exemples. (e) : cas 2.a avec $M(i) < M(i+1)$. On obtient $\beta = 0$ si $x_5 = 3 - 2$ et $\beta \neq 0$ si $x_5 = 3 - 1$. (f) : cas 2.a avec $M(i) > M(i+1)$ et $\beta = 0$. (g) : cas 2.b.

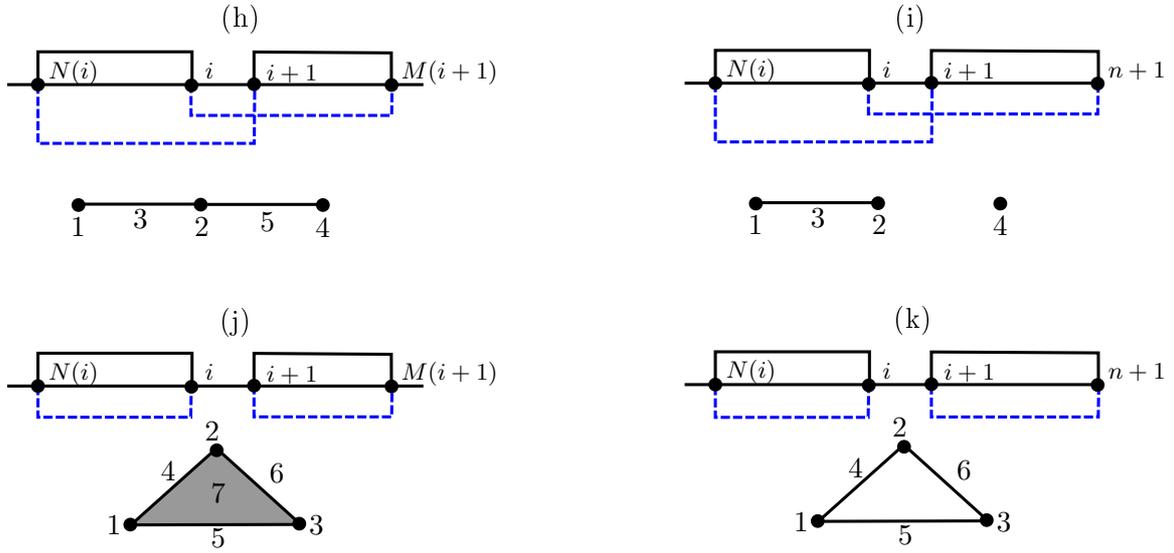


FIG. 3 – Cas où σ_i est négatif et σ_{i+1} est positif. (h),(i) : cas 1. $i = 3$ sur les deux exemples. (j),(k) : cas 2. $i = 5$ sur les deux exemples.

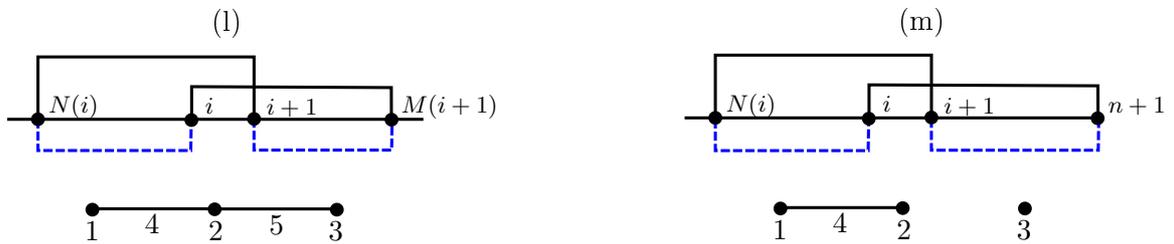


FIG. 4 – Cas où σ_i est positif et σ_{i+1} est négatif. (l),(m) : $i = 2$ sur les deux exemples.

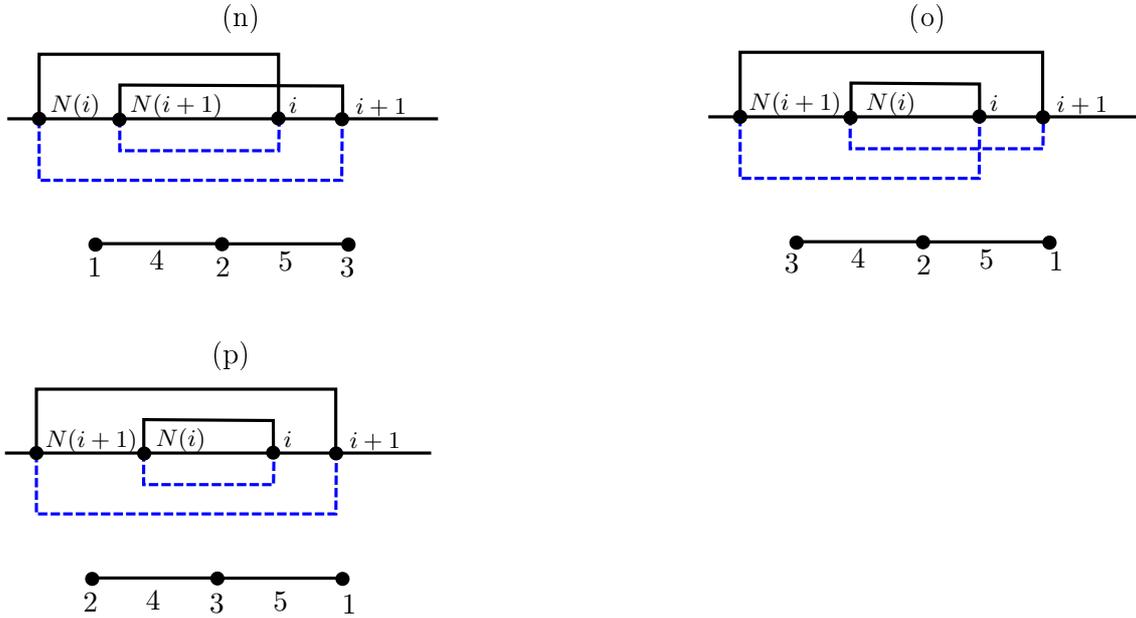


FIG. 5 – Cas où σ_i et σ_{i+1} sont négatifs. $i = 4$ sur tous les exemples. (n) : cas 1 avec $N(i+1) > N(i)$. On obtient $\beta = 0$ si $x_5 = 3 - 2$ et $\beta \neq 0$ si $x_5 = 3 - 1$. (o) : cas 1 avec $N(i+1) < N(i)$, $\beta = 0$. (p) : cas 2.

Complexité En maintenant l'expression de chaque x_j et du bord $\partial\sigma_i$ de chaque simplexe de la filtration dans la base $\{x_j\}$, on vérifie qu'un temps linéaire $O(n)$ suffit à la mise à jour des x_j , des $\partial\sigma_i$ et des intervalles de persistance après une transposition.

4 Persistance algébrique

On donne ici une vision plus abstraite de la persistance, comme développée par Carlsson et al. [6].

4.1 Définitions, rappels et résultats divers

Références sur les anneaux et modules (gradués) : Notes de Tom Marley
<http://www.math.unl.edu/~tmarley1/905notes.pdf>

Introductory Lectures on Rings and Modules. J. A. Beachy. London Mathematical Society, Student Texts 47.

Anneau principal = Principal Integral Domain (PID) = anneau intègre (unitaire et commutatif) dont tous les idéaux sont principaux (engendrés par un singleton).

Théorème 4.1 *Tout module de type fini sur un PID D se décompose de manière unique sous la forme*

$$D^\beta \bigoplus_{i=1}^n (D/d_i D)$$

avec $n, \beta \in \mathbb{Z}$, $d_i \in D$ tels que $d_i \mid d_{i+1}$.

Anneau \mathbb{Z} -gradué :

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i \text{ comme groupes abéliens} \quad (9)$$

$$A_i \cdot A_j \subset A_{i+j} \quad (10)$$

Remarque : A_0 est un sous-anneau.

Le *shift* $A(k)$ de A par k modifie la graduation de A de sorte que $A(k)_i = A_{i-k}$.

Module gradué sur un anneau A gradué :

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i \text{ comme groupes abéliens} \quad (11)$$

$$A_i \cdot M_j \subset M_{i+j} \quad (12)$$

Remarque : Chaque M_i est un R_0 -module.

Les éléments de M_i sont dits *homogènes* de degré i .

La somme de modules gradués est un module gradué de manière évidente.

N est un *sous-module gradué* de M si $N = \bigoplus_i N_i$ où $N_i = N \cap M_i$. C'est équivalent à dire que N admet une famille de générateurs homogènes, ou encore que les composantes homogènes de tout $u \in N$ sont dans N .

Si N est un sous-module gradué de M , alors M/N est naturellement un module gradué (sur le même anneau A) avec $(M/N)_i = \{m + N \mid m \in M_i\}$. (La graduation de N sert à montrer que la somme des $(M/N)_i$ est directe). Notons que $(M/N)_i \simeq M_i/N_i$.

Un morphisme $f : M \rightarrow N$ de modules gradués est un morphisme qui respecte la graduation. Il est de *degré* d si $f(M_i) \subset N_{i+d}$. Le noyau et l'image d'un morphisme gradué sont des sous-modules gradués. On en déduit que l'homologie d'un complexe de modules gradués est graduée.

Théorème 4.2 (de structure) *Tout module gradué de type fini sur un PID gradué D est isomorphe (au sens gradué) à une unique décomposition de la forme*

$$\bigoplus_{i=1}^n D(\alpha_i) \oplus \bigoplus_{j=1}^m (D/d_j D)(\alpha_j)$$

où $d_j \in D$ est homogène, $d_j \mid d_{j+1}$ et $\alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{Z}$.

4.2 Persistance

Si F est un corps, alors $D = F[t]$ est un PID gradué avec $D_i = t^i F$. De plus ses seuls idéaux homogènes sont de la forme $t^i F[t]$. La décomposition devient alors de la forme

$$\bigoplus_{k=1}^{\ell} F(a_k, b_k)$$

avec $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq a_k < b_k \leq +\infty$ et où

$$F(a, b) = (F[t]/(t^{b-a}))(a) \text{ si } b < +\infty \quad \text{et} \quad F(a, +\infty) = F[t](a)$$

Dit autrement $F(a, b)$ a des composantes homogènes de degrés a à $b - 1$ de la forme $F, \bar{t}F, \dots, \bar{t}^{b-a-1}F$ où $\bar{t} = t \pmod{t^{b-a}F[t]}$ est l'image de t par le quotient.

Les intervalles $[a_k, b_k[$ déterminent entièrement la décomposition et sont appelés *intervalles de persistance*.

On a $t^{j-i}M_i \subset M_j$. On pose $\beta_{i,j} = \dim t^{j-i}M_i$. D'après la décomposition ci-dessus, il est clair que $\beta_{i,j}$ compte le nombre d'intervalles de persistance contenant l'intervalle $[i, j]$. On en déduit que $\beta_{i,j} - \beta_{i-1,j}$ est le nombre d'intervalles de persistance de la forme $[i, k]$, avec $k \geq j$. Par suite, le nombre d'intervalles de persistance égaux à $[i, j[$ vaut $\beta_{i,j-1} - \beta_{i-1,j-1} - (\beta_{i,j} - \beta_{i-1,j})$.

Notons que si M est un $F[t]$ -module gradué, alors chaque M_i est un F -espace vectoriel. On en déduit que les composantes homogènes de l'homologie d'un complexe de $F[t]$ -modules gradués sont des F -espaces vectoriels.

4.3 Familles génératrices compatibles

On suppose que M est un $F[t]$ -module gradué non-négativement, de type fini. On considère une famille génératrice B de M formée d'éléments homogènes. On définit récursivement des familles $B_0, B_1, B_2 \dots$

- B_0 est le sous-ensemble des éléments 0-homogènes de B .
- Si $B_i = \{b_0, \dots, b_k\}$ et $tB_i = \{tb_0, \dots, tb_k\}$, alors B_{i+1} est l'union des éléments *non nuls* de tB_i et des éléments de degré i de B .

Une famille B est dite *compatible* si chaque B_i comme ci-dessus est une base de M_i comme F -espace vectoriel. D'après le théorème de structure M admet au moins une famille compatible : il suffit de prendre un générateur (l'unité de F , qui est de degré a_k) dans chaque $F(a_k, b_k)$. Dans ce dernier cas on obtient les intervalles de persistance en considérant pour chaque élément $e \in B$ sa durée de vie p_e , i.e. le plus petit p tel que $t^p e = 0$. L'intervalle associé est alors $[\deg e, \deg e + p_e]$. Plus généralement,

Lemme 4.3 *Si B est une famille génératrice compatible de M , alors M est isomorphe (au sens gradué) à*

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{e \in B} F(\deg e, \deg e + p_e)$$

Preuve : On considère l'application

$$e \in B \mapsto \text{l'unité de } F_e = F(\deg e, \deg e + p_e).$$

Cette application s'étend de manière unique en un morphisme gradué de degré 0. Pour le voir, on peut décomposer (de manière unique) un élément de M en composantes homogènes et décomposer chaque composante de degré i sur la base B_i . On vérifie qu'en envoyant les composantes (des composantes) ainsi trouvées de manière évidente dans \mathcal{M} on obtient bien un isomorphisme. \square

Ce lemme, ainsi que l'unicité du théorème de structure, assure qu'une famille compatible détermine les intervalles de persistance.

4.4 Morphismes et familles compatibles

Soit $f : M \rightarrow M'$ un morphisme 0-gradué entre les $F[t]$ -modules M et M' . Soit B (resp. B') une famille génératrice compatible de M (resp. M') telle que f est 'diagonale' dans B et B' .

4.5 Correspondance

Un *module de persistance de type fini* est une chaîne de modules de la forme $\{M_i, \phi_i\}_{i \geq 0}$ dont tous les modules sont de type fini et tel que les ϕ_i sont des isomorphismes à partir d'un certain rang fini.

Si $\{M_i, \phi_i\}_{i \geq 0}$ est une chaîne de A -modules, on peut lui associer de manière fonctorielle un $A[t]$ -module gradué \mathcal{M} avec $\mathcal{M}_i = M_i$, la multiplication externe étant définie par $tm_i = \phi_i(m_i)$ où m_i est un élément i -homogène.

Théorème 4.4 (de correspondance) *Ce foncteur α est en fait une équivalence entre la catégorie des chaînes de A -modules de type fini et la catégorie des $A[t]$ -modules de type fini gradués non négativement.*

La preuve fait appel à la théorie de Artin-Rees en algèbre commutative.

Considérons une filtration $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_r$. Pour chaque dimension k on considère le module de persistance

$$C_k(K_0) \hookrightarrow C_k(K_1) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow C_k(K_r)$$

où $C_k(K_i)$ désigne le A -module des k -chaînes de K_i à coefficients dans A . On note $C_k(*)$ ce module de persistance. L'opérateur bord définit un morphisme $\partial : C_k(*) \rightarrow C_{k-1}(*)$. Via la correspondance α ci-dessus, ∂ devient un morphisme de degré 0 entre les modules gradués $\mathcal{C}_k = \alpha(C_k(*))$ et $\mathcal{C}_{k-1} = \alpha(C_{k-1}(*)$). On obtient ainsi un complexe de chaîne de modules gradués

$$\dots \xrightarrow{\alpha(\partial)} \mathcal{C}_{k+1} \xrightarrow{\alpha(\partial)} \mathcal{C}_k \xrightarrow{\alpha(\partial)} \mathcal{C}_{k-1} \xrightarrow{\alpha(\partial)} \dots$$

La functorialité de α implique que l'homologie (graduée) de ce complexe coïncide avec l'image fonctorielle du module de persistance de homologies des K_i induit par les inclusions de la filtration.

Si A est un corps, alors le théorème de structure nous permet d'associer de manière invariante des intervalles de persistance à une filtration.

Références

- [1] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. Stability of Persistence Diagrams. *Discrete & Computational Geometry*, 37(1) :103–120, 2007.
- [2] David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner, and Dmitriy Morozov. Vines and Vineyards by Updating Persistence in Linear Time. In *22nd Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 119–126, 2006.

- [3] Herbert Edelsbrunner, David Letscher, and Afra Zomorodian. Topological Persistence and Simplification. In *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 454–463, 2000.
- [4] Herbert Edelsbrunner, Dmitriy Morozov, and Valerio Pascucci. Persistence-Sensitive Simplification of Functions on 2-Manifolds. In *22nd Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 127–134, 2006.
- [5] V. Robins. Towards computing homology from finite approximations. *Topology proceedings*, 24, 1999.
- [6] Afra Zomorodian and Gunnar Carlsson. Computing Persistent Homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33(2) :249–274, 2005.