Chapitre 2

Vers un diagramme de Reeb

L'objectif de ce chapitre est de justifier sur un plan mathématique l'approche algorithmique du chapitre 3. Nous montrons ici comment relier des concepts de géométrie différentielle tels que les fonctions de Morse ou les espaces fibrés avec une notion d'axe relatif à une surface. Par la suite nous dénoterons X cette surface. Elle représente un objet susceptible d'être métamorphosé.

À plusieurs reprises nous avons évoqué les notions d'espace fibré et de groupe de transformations agissant sur une variété. Ces deux notions fondamentales de la géométrie différentielle peuvent être reliées de la manière suivante. Si nous considérons un sous-groupe G du groupe des difféomorphismes $Diff(X)$ sur une variété X, nous pouvons regarder les orbites de chaque point x de cette variété, c'est-à-dire les ensembles de la forme $G.x$. Dans certains cas l'espace quotient X/G des orbites peut être muni d'une structure de variété différentielle, appelée variété des orbites, telle que X soit un espace fibré au dessus de la base X/G.

L'action d'un groupe permet donc de décomposer X en des éléments plus simples (les fibres et la base). Le cas le plus simple d'une telle action est celui où G est un groupe aux propriétés particulières appelé *groupe proprement discontinu et sans point fixe*. Sans entrer dans les détails (qui sont clairement exposés dans [BG87]) cela signifie que les orbites sont formées de points isolés. Parmi les exemples très classiques d'action de tels groupes sur des ensembles nous avons :

1. le tore T^n obtenu par quotient de $\mathbb{R}^n$ par le groupe des translations engendré par une base de $\mathbb{R}^n$,

2. la bouteille de Klein obtenue par quotient de $\mathbb{R}^2$ par le groupe engendré par les deux translations canoniques et la symétrie $(x, y) \mapsto (x + 1/2, -y)$,

3. les espaces projectifs obtenus par le quotient d'une sphère par le groupe formé de

l'identité et de la symétrie centrale (antipodie).

De tels groupes fournissent des variétés de même dimension que X (qui est alors un *revêtement* de X/G). Or nous aimerions obtenir une courbe à partir d'une surface et donc pouvoir changer de dimension.

De manière plus générale si G est un groupe de Lie opérant différentiablement sur X, alors sous certaines conditions traduisant grossièrement le fait que les orbites de G sont des sous-variétés de X (c.f. [Die71a] p. 58), X/G peut être muni d'une structure de variété différentielle[1] de dimension $dimX - dimG$.

Ainsi la connaissance d'un groupe de Lie de dimension 1 agissant convenablement sur notre objet permet de lui associer une variété de dimension $dimX - dimG = 2 - 1 = 1$, c'est à dire une courbe.

Par ailleurs la donnée d'un tel groupe de difféomorphisme à un paramètre (valant l'identité en 0) équivaut à la donnée d'un champ de vecteurs sur la variété X (c.f. [BG87], §3.5). Malheureusement le groupe engendré n'est pas nécessairement convenable. Choisissons par exemple sur $\mathbb{R}^2$ un champ uniforme du type $\mathbf{e_1} + \alpha\mathbf{e_2}$ où α est irrationnel. Par passage au quotient sur le tore T^2 ($= \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$) on obtient un champ dont les courbes intégrales sont denses sur T^2. Les orbites du groupe à un paramètre correspondant ne sont donc pas des sous-variétés de T^2.

Un moyen simple de contraindre le champ sur X est de le définir à partir d'une fonction de Morse (i.e. une fonction scalaire dont les singularités sont non dégénérées).

Si

- X est une variété compacte plongée dans $\mathbb{R}^3$ (munie de la métrique induite),
- J dénote la rotation de $+\pi/2$ dans les espaces tangents (X est orientable) et
- f est une fonction de Morse sur X,

alors $J.\nabla f$ est un champ sur X dont les courbes intégrales sont les courbes de niveau de f (ou encore f est une intégrale première de $J.\nabla f$). En ôtant de X les images réciproques des valeurs singulières de f (qui sont en nombre fini) on obtient, sur cet ensemble, un groupe G à un paramètre convenable pour le passage au quotient. Ce quotient X/G est donc une courbe (ou plus exactement un ensemble de courbes). Cette courbe est connexe si f admet deux singularités, son minimum et son maximum, et X est alors homéomorphe à une sphère (remarquons que f admet au moins son maximum et son minimum comme valeurs singulières sur une variété compacte).

1. On dit alors que X est un espace fibré principal de groupe structural G.

Les objets sur lesquels sont définis nos métamorphoses sont homéomorphes à la sphère S^2 (une partie cylindrique fermée par deux calottes sphériques). Pour associer une courbe à nos objets nous pouvons donc essayer de définir sur ceux-ci une fonction numérique n'admettant que deux singularités. D'ailleurs, puisque nos objets sont homéomorphes (et même difféomorphes) à la sphère, il existe en théorie un difféomorphisme ψ qui envoie chaque objet sur la sphère, et la fonction recherchée est simplement la composition de ce difféomorphisme avec la fonction hauteur sur la sphère (c.f figure 2.1).

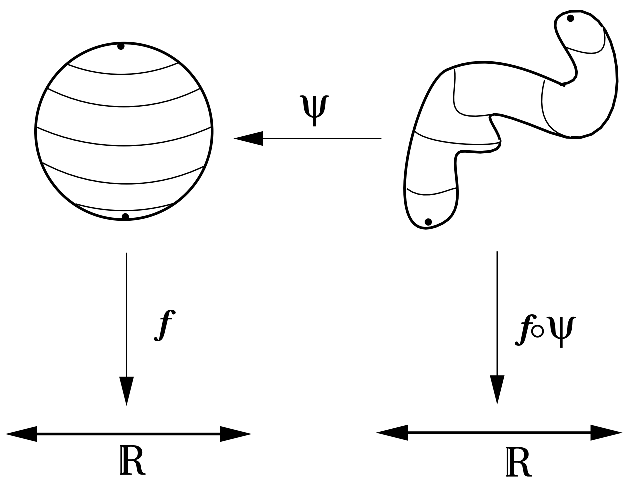


FIG. 2.1 – La fonction de Morse hauteur sur la sphère se transporte sur les formes qui lui sont difféomorphes.

Notons cependant que ce procédé de construction ne nous donne pas tout car la courbe quotient est définie de manière abstraite et elle n'est pas plongée canoniquement dans l'espace $\mathbb{R}^3$ où évoluent nos objets. Pour cela, il faut trouver un moyen d'associer un point de $\mathbb{R}^3$ à chaque orbite (ou fibre) de X/G. On peut par exemple prendre le barycentre des orbites ou toute autre application qui associe un point à une courbe fermée (les courbes de niveau de la fonction de Morse). Nous n'avons malheureusement pas trouvé de solution qui fournissait ne serait-ce qu'une immersion en presque tout point de X/G. Dans le cas du barycentre on ne peut espérer mieux comme le montre l'exemple d'une sphère dont on a "enfoncé" un morceau de calotte supérieure (c.f. figure 2.2). Par ailleurs la relation d'équivalence sur X induite par les orbites de G permet par passage au quotient sur l'espace topologique sous-jacent à X d'obtenir un espace topologique, également noté X/G (c.f. [Sch70], §VII.4) qui est l'espace sous-jacent au diagramme de Reeb. Les points de ce diagramme s'identifient aux composantes connexes des lignes de niveau de f. De plus ce diagramme possède une structure de complexe simplicial de dimension un.

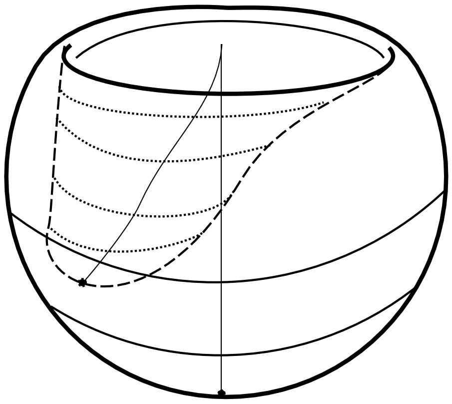


FIG. 2.2 – Les barycentres des lignes de niveau fournissent une courbe qui présente un point de rebroussement à l'endroit où la calotte est enfoncée.

Néanmoins je ne pense pas qu'il existe une immersion canonique de ce graphe dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$. Par exemple les barycentres des composantes connexes des courbes de niveau ne permettent pas de conserver la connexité lorsqu'on passe au voisinage d'un niveau critique (i.e. dont l'image est une valeur critique) comme le montre la figure 2.3. Dans un

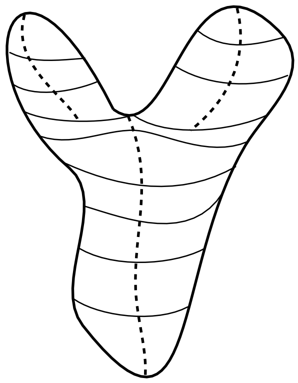


FIG. 2.3 – Les barycentres des composantes connexes des courbes de niveau ne forment pas un ensemble connexe.

premier temps nous nous sommes donc restreints à définir une fonction de Morse sur un objet et à décomposer l'objet en lamelles homéomorphes à un cylindre correspondant aux bouts de surface compris entre deux courbes de niveau.

L'idéal serait de pouvoir construire canoniquement une fonction de Morse n'ayant que deux singularités, ce que nous ne savons pas faire a priori. Nous pouvons par contre essayer de définir une fonction qui soit régulière sur une partie cylindrique aussi étendue que possible sur l'objet, de sorte que cette fonction fournisse un axe relatif à une grande partie de l'objet.

Comme nous l'avons vu, les fonctions hauteur sont en général des fonctions de Morse. On montre même que ce sont génériquement de telles fonctions [Ker92]. Mais pour qu'une fonction hauteur soit intéressante il faut que l'objet soit *monotone*[2] par rapport à la direction de projection relative à la hauteur. Or ce n'est pas toujours possible : sur la figure 2.4 nous avons un objet présentant une concavité en forme de demi-sphère qui n'est monotone par rapport à aucune direction. Autrement dit, dès que l'application qui à un point de l'objet

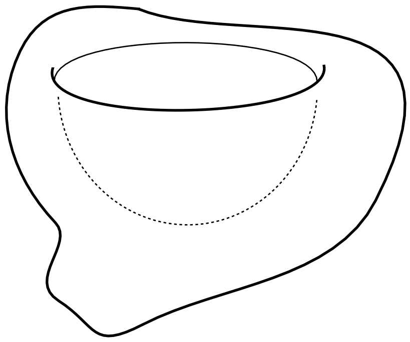


FIG. 2.4 – Un objet qui n'est monotone par rapport à aucune direction.

associe la direction de sa normale, revêt plus de deux fois le plan projectif, on peut dire qu'il n'existe pas de fonction hauteur n'ayant que deux singularités. De plus les fonctions hauteurs dépendent du plongement de l'objet ce qui diminue leur caractère général.

Une fois de plus l'utilisation des distances géodésiques (à un point source donné) semble être appropriée. Dans ce cas les lignes de niveau de l'application distance sont des cercles géodésiques relatifs au point source. En effet pour nos objets qui sont de forme allongée, on peut choisir comme point source un point qui représente intuitivement une extrémité de l'objet. L'étendue de validité de l'application distance est alors au moins égale à l'image du plus grand disque, dans l'espace tangent à la source, où l'application exponentielle est de rang 2. D'une autre manière le rayon de ce disque est la distance géodésique du point source s à son “cut-locus”, c'est à dire la distance géodésique minimale aux points conjugués de s[3] (c.f [BG87] §11.4 et [Wal76]). Dans [BG87], §11.4, ce rayon s'appelle *le rayon d'injectivité de l'application exponentielle en s.*

L'hypothèse que nous ferons est donc qu'il existe un point source sur l'objet dont le rayon d'injectivité est grand par rapport au diamètre (géodésique) de

2. sur les courbes et surface monotones en graphique on peut consulter [Paj92].

3. On sait par ailleurs que le cut-locus est l'adhérence des points joints par au moins deux chemins de longueur minimale.

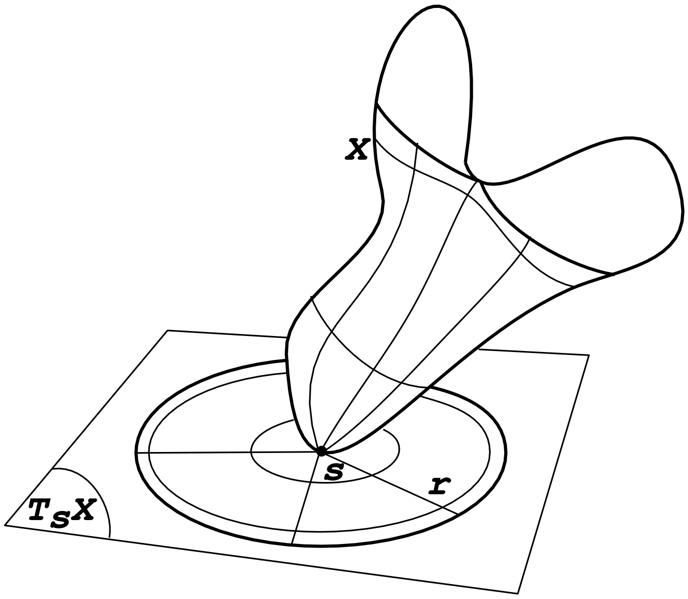


FIG. 2.5 – r est le rayon d'injectivité du point s.

l'objet.

Dans le chapitre suivant nous rappelons les méthodes pour calculer la distance géodésique sur un polyèdre puis nous donnons une description des courbes de niveau pour une fonction numérique définie sur les sommets d'un polyèdre et nous donnons un algorithme de calcul des courbes de niveau relatives à la fonction “distance géodésique à un point source”.

Chapitre 3

Un algorithme de découpage en bandelettes

3.1 Introduction

Nous allons, dans ce chapitre [1], décrire des algorithmes pour calculer les courbes de niveau de la distance géodésique à un point source sur un objet polyédrique, afin d'en déduire un axe pour cet objet par moyennage des courbes de niveau. Les deux problèmes principaux à résoudre sont donc :

1. le calcul des distances géodésiques sur un polyèdre,
2. la détermination des lignes de niveau.

Le premier point a largement été traité et nous situerons, dans la section 3.2, notre approche par rapport aux travaux existants. Par contre la détermination des lignes de niveau d'une fonction numérique sur un polyèdre, bien que couramment utilisée dans le domaine de la visualisation scientifique, ne semble pas avoir été explorée de manière précise en liaison avec les aspects topologiques et combinatoires. C'est donc sur ce point que nous insisterons.

Dans la section 3.3.2 nous nous plaçons dans un cadre général où la fonction définie sur l'objet polyédrique est quelconque. Ceci nous permet par analogie avec la théorie de Morse (voir par exemple [Gra71]) de développer une version (très simplifiée) combinatoire de cette théorie. Nous en déduisons chemin faisant une décomposition cylindrique des polyèdres, d'où le titre de ce chapitre.

Puis dans un second temps, dans la section 3.4, nous nous plaçons dans le cas où la fonction est la distance géodésique à un point source sur des polyèdres de topologie sphérique.

1. Une version réduite de ce chapitre a été présentée dans [LV95].

Ceci nous permet dans la section 3.5 de définir un axe pour l'objet polyédrique à partir des courbes de niveau de la distance géodésique à un point source.

3.2 Géodésiques sur les polyèdres

La détermination des géodésiques dans des environnements polyédriques a fait l'objet de nombreuses recherches en particulier pour des applications robotiques. L'application exponentielle (liée aux géodésiques, comme nous l'avons vu dans première partie de ce manuscrit) a également été utilisée dans le but d'interpoler des données sur un polyèdre : possédant des données en certains sommets on étend ces données à tous les sommets à l'aide d'une interpolation liée à un paramétrage local donné par l'application exponentielle ([OP94]).

Le problème fondamental traité dans [MMP87] est de trouver un plus court chemin tracé sur un polyèdre triangulé entre deux sommets quelconques et, plus généralement, pour un sommet source donné, de trouver les plus courts chemins entre ce point source et un point quelconque du polyèdre.

L'idée essentielle intervenant dans la résolution de ce problème est d'utiliser le fait que si γ est un plus court chemin entre deux sommets p et q alors en "dépliant" dans un plan les faces traversées par γ le long des arêtes traversées[2], γ se déplie en un segment de droite reliant les deux sommets "dépliés" correspondant à p et q (voir figure 3.1).

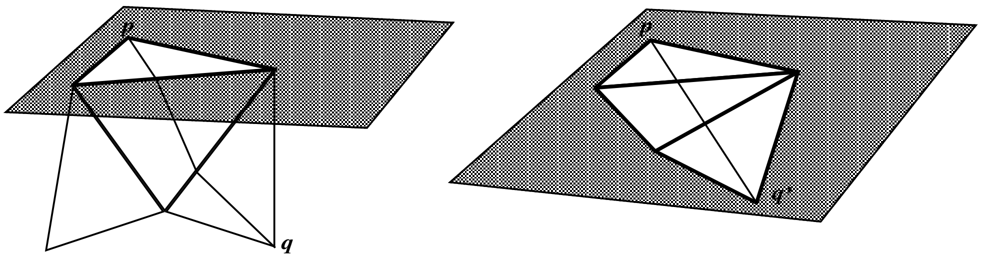


FIG. 3.1 – Les géodésiques se déplient en segment de droite...

Dans [MMP87] on remarque ensuite que toute arête peut être décomposée en zones appelées *intervalles d'optimalité* correspondant à des points dont les plus courts chemins (vers la source) associés traversent les mêmes séquences de faces et d'arêtes (voir figure 3.2).

2. Si le polyèdre considéré est convexe, le plus court chemin traverse les arêtes en leur intérieur, sinon il se peut que le plus court chemin passe par des sommets intermédiaires. Dans ce cas la propriété de dépliement rectiligne doit être considérée entre chaque couple de ces sommets.

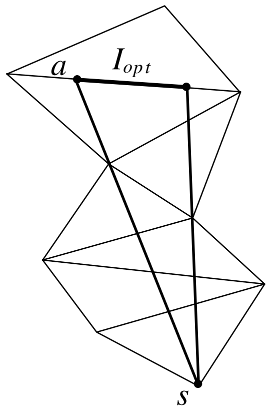


FIG. 3.2 – Propagation d'un intervalle d'optimalité.

L'algorithme donné dans [MMP87] détermine ces intervalles d'optimalité. Comme dans l'algorithme de Dijkstra que nous explicitons plus loin, celui-ci fonctionne sur un principe de propagation des intervalles d'optimalité à partir de la source et maintient une liste d'événements correspondant aux intervalles déjà rencontrés mais qui n'ont pas encore été subdivisés assez finement (i.e. pour lesquels il existe des points dont les plus courts chemins associés passent par des séquences de faces et d'arêtes différentes).

L'algorithme résout le problème des géodésiques avec source unique en temps $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ et en place $\mathcal{O}(n^2)$, où n est le nombre d'arêtes du polyèdre. De plus il est possible de trouver les géodésiques à la source pour un point quelconque du polyèdre (i.e. pour un point intérieur à une face) en propageant les intervalles d'optimalité à l'intérieur des faces : chaque arête donne lieu à une subdivision des deux faces adjacentes en $\mathcal{O}(n)$ régions correspondant à ses intervalles d'optimalité. Pour trouver la distance d'un point quelconque on le localise dans une face puis dans les trois subdivisions relatives à chaque arête de la face et on retient le plus court chemin associé.

Après ces pré-calculs, la distance géodésique pour un point quelconque s'obtient en temps linéaire par rapport au nombre de faces traversées par une géodésique pour rejoindre la source.

Les temps de calculs sont cependant trop importants pour un outil interactif. Nous avons préféré nous limiter à une approximation de la distance géodésique en nous restreignant au graphe du polyèdre. Autrement dit, au lieu de considérer le polyèdre avec ses faces, on ne considère que son armature formée de ses arêtes et sommets.

L'algorithme de Dijkstra est tout à fait adapté pour résoudre ce problème. C'est en effet l'algorithme le plus classique pour trouver les plus courts chemins à origine unique dans un graphe orienté dont les arêtes sont pondérées positivement[3]. Il est parfaitement décrit dans [CLR94] et nous ne le présenterons pas ici.

Rappelons seulement qu'il peut être programmé à l'aide d'un tas de Fibonacci et qu'il fournit dans ce cas la distance à la source et une géodésique pour tout sommet en temps $\mathcal{O}(n \log n + p)$ où n est le nombre de sommets et p le nombre d'arêtes.

Dans notre implémentation l'utilisateur peut désigner un sommet quelconque du polyèdre avec la souris.

De plus, si le polyèdre n'est pas triangulé, nous complétons le graphe de chaque face par la clique correspondante comme sur la figure 3.3. On augmente ainsi le nombre de

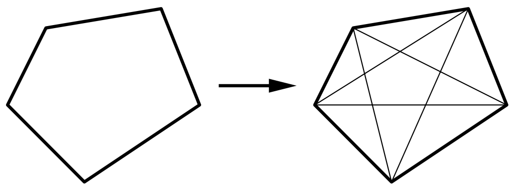


FIG. 3.3 – Les faces sont complétés par toutes arêtes possibles entre leurs sommets.

chemins possibles entre les sommets ce qui permet d'obtenir des distances plus proches de celles obtenues pour des géodésiques tracées sur la *surface* du polyèdre tout en conservant une complexité raisonnable (en admettant que les faces n'ont pas $\mathcal{O}(n)$ arêtes !). Par la suite nous tiendrons compte du fait que les arêtes fournies par l'algorithme de Dijkstra ne sont pas forcément des arêtes du polyèdre mais des liaisons entre deux sommets d'une même face.

3.3 Fonctions numériques sur les polyèdres

Dans toute cette section nous oublions temporairement que la fonction qui sert à définir les courbes de niveau sur nos objets est une distance géodésique.

Nous nous plaçons dans un cadre général où l'objet est un polyèdre triangulé $\mathcal{T}$ et la fonction, notée c, est définie sur les sommets de $\mathcal{T}$ et à valeurs dans un ensemble totalement ordonné quelconque (dans la pratique $\mathbb{R}$).

Nous supposerons que c associe des valeurs distinctes à des sommets adjacents. En théorie des graphes une telle fonction s'appelle un **coloriage** (dans ce cas on ne suppose pas que

3. Il suffit en fait qu'il n'y ait aucun cycle de poids négatif.

l'ensemble d'arrivée est ordonné)[4]. Dans ce qui suit, nous ferons jouer aux coloriages sur les polyèdres un rôle analogue aux fonctions de Morse sur les surfaces[5].

Il existe en effet une formule simple reliant les indices des points critiques d'une fonction de Morse définie sur une surface et la caractéristique d'Euler-Poincaré de cette surface.

De plus une fonction de Morse permet de découper une surface en morceaux homéomorphes à des cylindres en ôtant de la surface les courbes de niveau (ou plus exactement les ensembles de niveau) relatives à chaque valeur singulière (pour un exposé rapide et clair sur ce sujet on peut se reporter à [Gra71]) comme sur la figure 3.4.

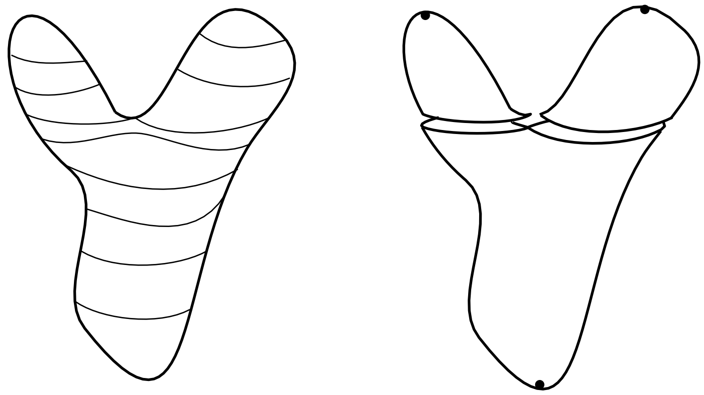


FIG. 3.4 – Un découpage en parties cylindriques. Les points noirs représentent des ensembles critiques qui doivent être ôtés.

Nous montrons dans le reste de la section 3.3 comment ces deux propriétés se traduisent en terme de coloriage sur les polyèdres.

4. Un problème classique lié aux coloriages est par exemple de trouver pour un graphe donné le plus petit cardinal des ensembles image de tous les coloriages possibles de ce graphe [Ber70, AH80].

5. Un cas trivial de coloriage est celui où toutes les valeurs prises par les sommets sont différentes. On en déduit un résultat analogue au fait que les fonctions hauteur sont génériquement des fonctions de Morse. En effet, pour un polyèdre plongé dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des directions de hauteur pour lesquelles les sommets ne reçoivent pas tous des valeurs différentes est l'ensemble des directions orthogonales aux faisceaux de plans déterminés par deux sommets quelconques du polyèdre. Cet ensemble constitue une réunion d'au plus n(n+1)/2 sous-variétés compactes de dimension 1 ($= P^1 \sim S^1$), correspondant à chaque faisceau, dans l'ensemble des directions. L'ensemble des directions étant une variété de dimension 2 (le plan projectif), le complémentaire des directions non-admissibles (une union finie de compact d'intérieur vide) est donc bien un ouvert dense dans l'ensemble des directions de hauteur.

3.3.1 Coloriage et caractéristique d'Euler-Poincaré

Nous donnons une relation simple entre le coloriage d'un polyèdre triangulé $\mathcal{T}$ et la caractéristique d'Euler-Poincaré de ce polyèdre. Notons qu'il s'agit d'une relation purement topologique et que le polyèdre n'a pas besoin d'être plongé. Un polyèdre triangulé (topologique) est la donnée d'un graphe non orienté et d'un ensemble de faces qui sont des cycles d'ordre 3 du graphe, tel que l'ensemble des faces adjacentes à un sommet soit homéomorphe à une triangulation du disque de dimension 2. Ce polyèdre n'est pas nécessairement orientable et nous ne préciserons cette condition que lorsqu'elle sera nécessaire.

Donnons tout d'abord quelques définitions :

- Si $\bar{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ est un n-uplet de nombres, nous appelons **variation** de $\bar{c}$ par rapport au nombre c_0, et notons $V(\bar{c}|c_0)$ le nombre de changements de signe de la séquence $(sg(c_1, c_0), sg(c_2, c_0), ..., sg(c_n, c_0))$ où

  $$\begin{cases} sg(a,b) = 1 & \text{si } a < b \\ sg(a,b) = -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Exemples :

  $$V(1,2,3,4 \,|\, 0) = 0$$
  $$V(-2, 3.5, 0, -1 \,|\, -1.5) = 1$$

- Pour tout sommet s de $\mathcal{T}$ on définit la **variation du sommet** s **relativement au coloriage** c, notée $V_c(s)$:

  si $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont les voisins de s ordonnés circulairement (c.f. figure 3.5) alors

  $$V_c(s) = V(c(s_1), c(s_2), \ldots, c(s_n), c(s_1) | c(s))$$

  Si c est à valeurs dans $\mathbb{R}$ c'est aussi le nombre de changements de signe de la séquence $(c(s_1) - c(s), c(s_2) - c(s), \ldots, c(s_n) - c(s), c(s_1) - c(s))$ (qu'on appelle souvent aussi variation).

- Nous appelons **indice** du sommet s le nombre (entier) :

  $$Ind_c(s) = 1 - \frac{V_c(s)}{2}$$

Nous avons alors la propriété remarquable :

Proposition 3.1 *Soit $\mathcal{T}$ un polyèdre triangulé, c un coloriage de $\mathcal{T}$, alors*

$$\sum_{s \in \mathcal{T}} Ind_c(s) = \chi(\mathcal{T}) \tag{3.1}$$

où $\chi(\mathcal{T})$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré du polyèdre $\mathcal{T}$ [GS94, HP94].

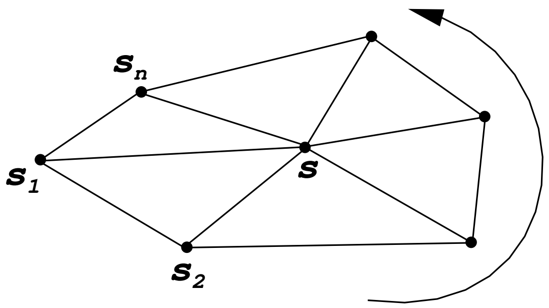


FIG. 3.5 – Les voisins du sommet s.

Démonstration :[6] Remarquons tout d'abord qu'un coloriage c induit une orientation sur les arêtes du polyèdre $\mathcal{T}$ (le contraire est faux : c.f. figure 3.6) :
Si a est une arête de $\mathcal{T}$ d'extrémités s_1 et s_2, a est orientée de s_1 vers s_2 si $c(s_1) < c(s_2)$.
Par ailleurs, en notant respectivement $|s|, |a|$ et $|f|$ les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de $\mathcal{T}$, nous avons :

$$\sum_{s\in\mathcal{T}} Ind_c(s) = |s| - \frac{1}{2}\sum_{s\in\mathcal{T}} V_c(s)$$

Or $\sum_{s\in\mathcal{T}} V_c(s)$ compte le nombre de paires d'arêtes incidentes à une même face qui sont orientées de manière compatible. Comme chaque face possède exactement une paire d'arêtes de ce type (c.f. figure 3.7), ce nombre est également le nombre de faces de $\mathcal{T}$, d'où :

$$\sum_{s\in\mathcal{T}} Ind_c(s) = |s| - \frac{1}{2}|f|$$

Par ailleurs, $\mathcal{T}$ étant triangulé, nous avons

$$3|f| = 2|a|$$

qui est encore le nombre de paires (f, a) où l'arête a est incidente à la face f. On en déduit

$$\sum_{s\in\mathcal{T}} Ind_c(s) = |s| - |a| + |f| = \chi(\mathcal{T})$$

qui est la classique formule d'Euler □

Pour justifier le terme d'*indice* nous proposons de nous ramener à la notion d'indice d'un champ de vecteurs. Nous définissons à cette fin un champ de vecteurs continu sur $\mathcal{T}$ tangent à ses arêtes (orientées) et dont les singularités (i.e. là où le champ est nul) sont exactement les sommets de $\mathcal{T}$. Pour cela il suffit de le définir sur une face (triangulaire) de $\mathcal{T}$ de sorte que les triangles se "raccordent" continûment.

6. Je remercie Christian Choffrut et Pascal Lienhardt de m'avoir communiqué cette démonstration.

Soit $f = (s_1, s_2, s_3)$ une face de $\mathcal{T}$ telle que $c(s_1) < c(s_2) < c(s_3)$. Il est toujours possible de ré-indexer les sommets de f pour que cette relation soit vraie. On définit un champ sur f dont les lignes de champs ont l'allure de la figure 3.6. Nous donnons en appendice F un exemple de construction de ce champ (qui n'est pas si simple qu'elle paraît). Le champ

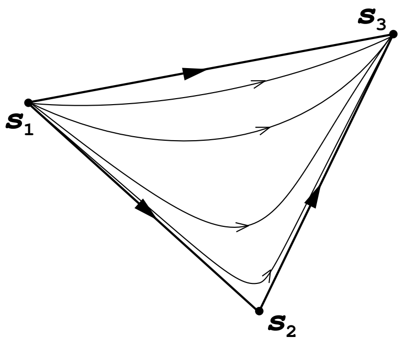


FIG. 3.6 – Les lignes de champ sur un triangle. La configuration représentée a toujours lieu : une arête a une orientation opposée aux deux autres, plus généralement il n'existe aucun cycle d'arêtes d'orientations compatibles sur le polyèdre.

au voisinage d'un sommet s de $\mathcal{T}$ a par exemple l'allure de la figure 3.7. Il est facile de

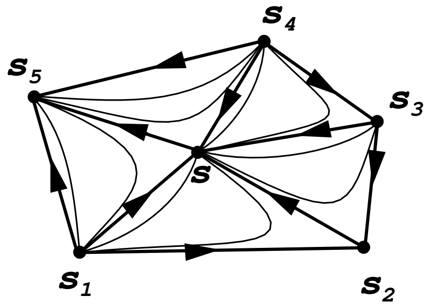


FIG. 3.7 – L'indice du sommet s est nul.

voir que l'indice de ce champ au sommet s est justement ce que nous avons appelé l'indice d'un sommet. Nous retrouvons ainsi la relation entre les indices des singularités d'un champ de vecteurs et la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface (c.f. [Pha92] : Indices des champs de vecteurs et caractéristique d'Euler des surfaces, pp. 85-98).

3.3.2 Courbes de niveau des coloriages

Après avoir montré une relation d'Euler pour les coloriages nous nous intéressons au problème du tracé de lignes de niveau relatives à un coloriage. Ces lignes de niveau permettent de décomposer un objet en bandelettes cylindriques comme nous le verrons par la suite.

Décrivons tout d'abord les travaux existants sur le tracé des lignes de niveau.

Le tracé des courbes isovaleur d'une grille plane valuée ou d'une fonction sur un polyèdre est une application classique de la visualisation scientifique en particulier pour la cartographie.

Dans [Sut87] on cherche les lignes de contour d'une grille planaire rectangulaire. La ligne de contour de niveau h doit traverser les arêtes (s_1, s_2) telles que :

$$h(s_1) \leq h \leq h(s_2).$$

Partant d'une arête traversée par le niveau h on progresse de rectangle en rectangle jusqu'à retomber sur l'arête de départ (ou à sortir de la grille !) comme sur la figure 3.8. Certains

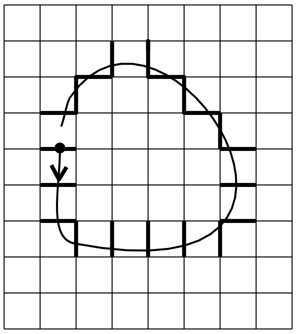


FIG. 3.8 – La ligne de niveau traverse les arêtes tracées en trait gras.

rectangles dit *dégénérés* peuvent poser problème lorsque leurs quatre côtés sont traversés par le niveau h (c.f. figure 3.9). Ces cas sont traités de manière heuristique. Par exemple dans [KCM94] l'ambiguïté est levée par une interpolation bilinéaire à l'intérieur de chaque rectangle. En un point de coordonnées (u, v) dans un rectangle $(s_{00}, s_{01}, s_{11}, s_{10})$ nous avons ainsi :

$$h(u,v) = (1-v)\,[(1-u)\,h(s_{00}) + u\,h(s_{10})] \; + \; v\,[(1-u)\,h(s_{01}) + u\,h(s_{11})]$$

Les lignes de niveau de cette fonction sont des branches d'hyperboles qui permettent de connecter les côtés des arêtes traversées par le niveau courant.

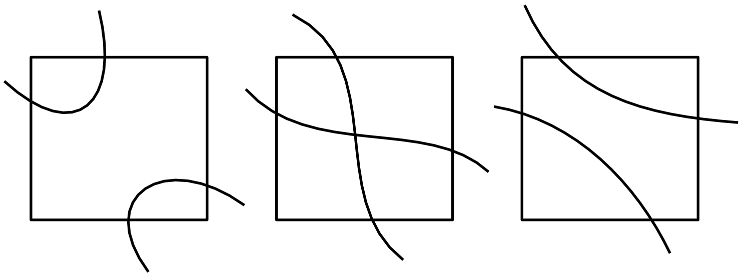


FIG. 3.9 – Les trois possibilités de raccord des lignes de niveau dans un rectangle dégénéré.

Lorsqu'il n'y a pas d'informations particulières sur la fonction à interpoler, le point s d'intersection de la ligne de niveau h avec une arête (s_1, s_2) est obtenu par interpolation linéaire inverse :

$$s = \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2, \qquad \alpha = \frac{h(s_2) - h}{h(s_1) - h(s_2)}$$

Puis, le contour est interpolé entre ces sommets s, soit linéairement soit à l'aide d'une spline (c.f. figure 3.10).

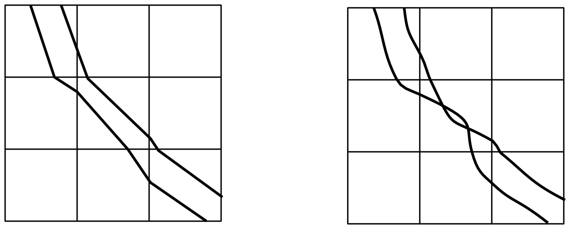


FIG. 3.10 – À gauche : interpolation linéaire des courbes de niveau. À droite : l'interpolation spline peut générer des incohérences.

L'interpolation par une spline s'étend plus difficilement à des contours tracés sur des polyèdres car la spline d'interpolation n'a pas de raison de coller au polyèdre. La solution proposée dans [Wij91] est de calculer directement un “rendu” de la surface polyédrique avec ses courbes de niveau. Pour cela l'auteur associe une couleur à chaque point intérieur aux faces du polyèdre en fonction de sa distance aux sommets de la face le contenant et de la valeur de ces sommets[7]. Un paramètre permet de régler l'épaisseur des courbes de niveau (c.f. [Wij91] pour de jolies photographies couleur).

Cette dernière méthode qui a le mérite d'être robuste, en ce sens qu'elle ne présente

7. Pour un état de l'art sur les interpolations à partir de données discrètes voir [FN94]

pas de difficulté numérique ou algorithmique particulière, ne permet pas d'extraire de façon simple des informations telles que le barycentre sur les courbes de niveau.

Par contre le suivi de contour sur une grille comme dans [Sut87] fournit des lignes polygonales que l'on peut aisément manipuler. C'est pourquoi nous avons choisi ce type d'algorithme et de représentation pour les courbes de niveau des coloriages. Cependant la robustesse des algorithmes de suivi n'est pas traitée et requiert des choix arbitraires comme le montre la figure 3.9.

Dans ce qui suit nous donnons une description plus précise des courbes de niveau pour le coloriage d'un polyèdre connexe, orientable et triangulé $\mathcal{T}$ que nous étendons à des polyèdres non triangulés.

3.3.3 Courbes de niveau et coloriage sur les triangulations

Nous décrivons ici une notion de courbe de niveau sur un polyèdre triangulé et colorié. Tout ce qui suit est, à notre connaissance, entièrement original et ne fait référence à aucun article particulier.

Comme en 3.3 nous nous donnons un polyèdre triangulé $\mathcal{T}$ et un coloriage c à valeur dans $\mathbb{R}$. Les arêtes de $\mathcal{T}$ sont orientées comme précédemment.

Nous dirons qu'une valeur est **régulière** si elle n'appartient pas à l'image de c. Nous notons M le maximum (resp. m le minimum) de c :

$$M = \max_{s \in \mathcal{T}} c(s)$$
$$m = \min_{s \in \mathcal{T}} c(s)$$

Nous dirons qu'une arête (s_1, s_2) est **transverse** au niveau c_0 si

$$c(s_1) < c_0 < c(s_2)$$

Remarquons par ailleurs que $\mathcal{T}$ induit un graphe sur ses arêtes pour la relation qui lie deux arêtes adjacentes et incidentes à une même face (dans le cas d'une triangulation l'adjacence est automatiquement vérifiée). Ce graphe peut canoniquement être muni d'une structure de polyèdre, les faces correspondant aux cycles d'arêtes incidentes à une même face ou à un même sommet. Il s'agit donc du polyèdre tronqué de $\mathcal{T}$ qui a les mêmes caractéristiques topologiques que ce dernier. Nous notons $\mathcal{A}$ ce polyèdre.

Nous appelons **contour de niveau** c_0, et notons $\mathcal{C}_{c_0}$ l'ensemble des arêtes (de $\mathcal{T}$) transverses au niveau c_0. Ces arêtes forment un sous-ensemble des sommets de $\mathcal{A}$ auquel nous associons une structure de graphe induite (i.e. $\mathcal{C}_{c_0}$ est considéré comme un sous graphe de $\mathcal{A}$).

Proposition 3.2 *Pour toute valeur régulière c_0 comprise entre m et M le contour de niveau c_0 est une union finie non vide de cycles simples de $\mathcal{A}$.*

Démonstration :

1. Il existe au moins une arête transverse au niveau c_0 : soit s_m (resp. s_M) un sommet de couleur m (resp. M). Puisque $\mathcal{T}$ est connexe il existe un chemin (i.e. une suite de sommets adjacents) $(s_m = s_1, s_2, \ldots, s_q = s_M)$ joignant s_m à s_M. Posons :

$$j = \max(k \geq 1 \,|\, c(s_i) < c_0,\, \forall i = 1, \ldots, k)$$

alors l'arête (s_j, s_{j+1}) est transverse à c_0.

2. Toute arête $a = (s_1, s_2)$ transverse à c_0 est adjacente dans $\mathcal{A}$ à exactement deux arêtes transverses. En effet, chacune des deux faces f_1 et f_2 incidentes à a admet une seule autre arête a_1 (resp. a_2) transverse à c_0. Il suffit de considérer les trois cas possibles suivants (voir figure 3.11 gauche pour les notations) :

$$\begin{array}{lc}
c(s_3) < c(s_1) < c(s_2) \Rightarrow & a_s = (s_3, s_1) \\
c(s_1) < c(s_3) < c(s_2) \Rightarrow & \text{ou bien } a_s = (s_1, s_3) \text{ ou bien } a_s = (s_3, s_2) \\
c(s_1) < c(s_2) < c(s_3) \Rightarrow & a_s = (s_1, s_3)
\end{array}$$

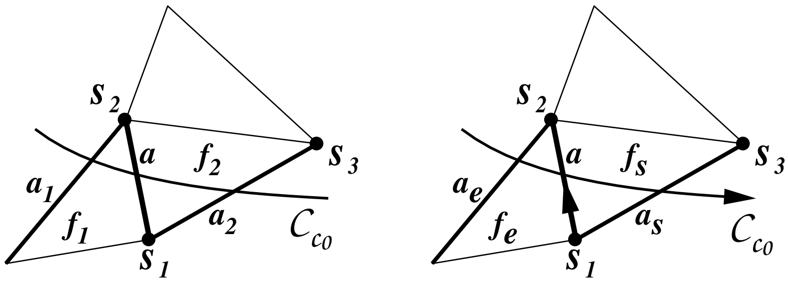


FIG. 3.11 – À gauche : la configuration générale. À droite : le cas orienté.

Comme il y a un nombre fini d'arêtes, $\mathcal{C}_{c_0}$ est nécessairement une union finie de cycles simples□

Remarque 3.1 *Lorsque $\mathcal{T}$ est orientable, son orientation induit une orientation de $\mathcal{C}_{c_0}$. En effet l'orientation de a et de $\mathcal{T}$ permet de singulariser une face entrante f_e et une face sortante f_s pour a (voir figure 3.11 droite). Chacune de ces faces permet de définir une arête de sortie a_s pour laquelle f_s est une face entrante et une arête entrante a_e pour laquelle f_e est sortante. Chaque arête a transverse possède donc un unique prédécesseur et un unique successeur transverse relativement à l'orientation locale.*

Nous numérotons désormais les sommets de $\mathcal{T}$ de 1 à n de sorte que :

$$m = c(s_1) \leq c(s_2) \leq \ldots \leq c(s_n) = M$$

Lemme 3.1 *Si c_1 et c_2 sont deux niveaux appartenant à un même intervalle $]c(s_{i-1}), c(s_i)[$ $(i \in [2, n])$ alors $\mathcal{C}_{c_1} = \mathcal{C}_{c_2}$. On note $\mathcal{C}_i$ cette valeur commune.*

Démonstration : Toute arête transverse à c_1 est transverse à c_2 et réciproquement □

Si $c(s_{i-1}) < c(s_i) = c(s_{i+1}) = \ldots = c(s_{i+p}) < c(s_{i+p+1})$ on posera :

$$\mathcal{C}_{i+p} = \mathcal{C}_{i+p-1} = \ldots = \mathcal{C}_i$$

On en déduit que les changements de topologie des lignes de niveau ne peuvent se produire qu'au passage des sommets. Ces changements dépendent clairement de l'indice des sommets considérés (c.f. figure 3.12).

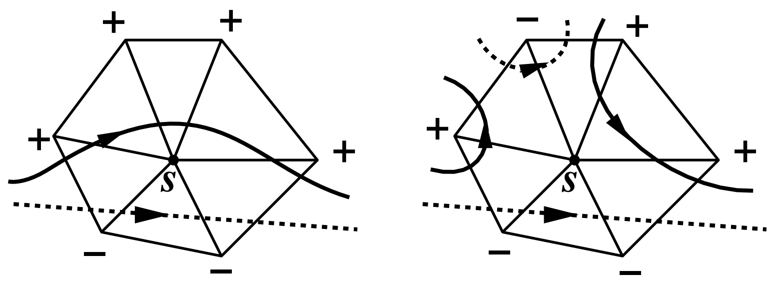


FIG. 3.12 – Deux exemples de modifications de contour au voisinage d'un sommet s. Les "+" (resp. "-") symbolisent des sommets de couleurs supérieures (resp. inférieures) à $c(s)$. La courbe en trait pointillé (resp. plein) représente la ligne de niveau inférieure (resp. supérieure) à $c(s)$.

Proposition 3.3 *Si tout sommet de même couleur que s_i a un indice nul alors $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_{i+1}$ sont homotopes. Ils sont alors constitués du même nombre de cycles qui se correspondent deux à deux et se déduisent par substitution de chaînes simples.*

Démonstration : Soit $a = (\sigma_1, \sigma_2)$ une arête orientée de $\mathcal{C}_i$.

- ou bien $c(\sigma_2) \neq c(s_i)$ et alors $a \in \mathcal{C}_{i+1}$,
- ou bien $c(\sigma_2) = c(s_i)$ et alors

$$Ind_c(\sigma_2) = 0 \qquad \text{c.a.d} \qquad V_c(\sigma_2) = 2$$

Les voisins de σ_2 forment (dans $\mathcal{T}$) un cycle simple ayant deux composantes connexes : les voisins de couleur supérieure à $c(s_i)$ et ceux de couleur inférieure (voir figure 3.13). Les arêtes reliant σ_2 à ses voisins "inférieurs" forment donc une chaîne simple dans

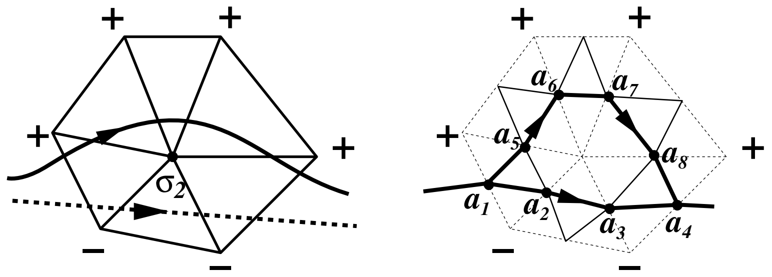


FIG. 3.13 – À droite : le sommet σ_2 de couleur $c(s_i)$ d'indice nul. À gauche : le graphe des arêtes correspondantes. $\mathcal{C}_i$ contient la chaîne (a_1, a_2, a_3, a_4) qui est remplaçée par $(a_1, a_5, a_6, a_7, a_8, a_4)$ dans $\mathcal{C}_{i+1}$.

$\mathcal{C}_i$ qui contient a. Cette chaîne est remplaçée dans $\mathcal{C}_{i+1}$ par les arêtes reliant σ_2 à ses voisins "supérieurs" □

On appellera **sommets réguliers** les sommets d'indice nul et **sommets critiques** les autres sommets.

Remarque 3.2 *Les sommets d'indice positif (nécessairement égal à 1) sont des extremums locaux. La formule d'Euler de la section précédente devient ainsi :*

$$\#\{extremum\ local\} + \sum_{Ind(s)<0} Ind(s) = \chi(\mathcal{T})$$

De plus, l'évolution des contours de niveau au voisinage d'un extremum se traduit localement par des créations ou disparitions de cycles.

On appelle **réalisation** d'un contour $\mathcal{C}_h = (a_1, a_2, \ldots, a_q)$ ou plus simplement **ligne de niveau**, notée $\mathcal{L}_h$, une ligne polygonale $(p_1, p_2, \ldots, p_q)$ telle que p_i appartient à a_i et dont les cycles correspondent aux cycles de $\mathcal{C}_h$.

Exemples de réalisation

1. Si c est une application hauteur, les lignes de niveau sont les intersections de $\mathcal{T}$ avec les plans perpendiculaires à la direction de hauteur. Le sommet p de $\mathcal{L}_h$ sur une arête $a = (s_1, s_2)$ de $\mathcal{C}_h$ est obtenu par la formule :

$$p = \alpha\, s_1 + (1 - \alpha)\, s_2, \qquad \alpha = \frac{c(s_2) - h}{c(s_1) - c(s_2)} \tag{3.2}$$

2. Si c est une application distance déduite de l'algorithme de Dijkstra, nous conservons la formule 3.2. h coïncide d'ailleurs avec la distance géodésique du point p de l'arête (s_1, s_2) à la source (relativement à l'armature du polyèdre $\mathcal{T}$), si et seulement si il existe un chemin géodésique pour s_2 contenant l'arête (s_1, s_2).

   En effet, soit γ_1 un chemin géodésique joignant s_1 à la source, en notant c_p la distance géodésique de p à la source, nous avons :

$$c_p = c(s_1) + d(s_1, p) = c(s_2) - d(p, s_2)$$

   puisque $s_2 s_1.\gamma_1$ est une géodésique, ou encore :

$$c(s_2) = c(s_1) + d(s_1, s_2) = c(s_1) + d(s_1, p) + d(p, s_2)$$

   Comme par ailleurs

$$p = s_1 + \frac{d(s_1, p)}{d(s_1, s_2)}(s_2 - s_1).$$

   on en déduit la formule 3.2 avec

$$\alpha = \frac{c(s_2) - c_p}{c(s_1) - c(s_2)}$$

   c'est à dire $h = c_p$.

   Si $s_2 s_1.\gamma_1$ n'est pas une géodésique alors $c(s_2) < c(s_1) + d(s_1, s_2)$ et la formule précédente est fausse.

3.3.4 Décomposition en bandelettes

On déduit de ce qui précède la décomposition suivante :

Proposition 3.4 *Soit un polyèdre connexe et triangulé $\mathcal{T}$, c un coloriage de $\mathcal{T}$ et $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les sommets de $\mathcal{T}$ ordonnés par leur couleur, une décomposition de $\mathcal{T}$ en bandelettes homéomorphes à des (unions de) cylindres est donnée par l'union des bandes B_i où*

$$B_i = \bigcup_{c(s_i) < h < c(s_{i+1})} \mathcal{L}_h$$

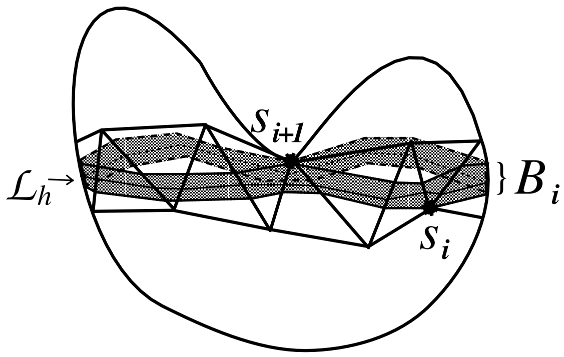


FIG. 3.14 – Une bande cylindrique entre deux niveaux $c(s_i)$ et $c(s_{i+1})$.

La figure 3.14 montre une bande B_i formée d'un seul cylindre. Il est possible d'obtenir une décomposition minimale en regroupant les cylindres de la décomposition précédente. Chaque B_i est en effet composée de plusieurs cylindres, autant que de composantes connexes de $\mathcal{C}_i$, que nous notons $\mathcal{D}_{i,j}$. On regroupe alors $\mathcal{D}_{i,j}$ et $\mathcal{D}_{i+1,k}$ s'ils ont un bord commun et si les éventuels sommets (de $\mathcal{T}$) de ce bord sont réguliers.

3.3.5 Cas des polyèdres non triangulés

Lorsque $\mathcal{T}$ n'est pas triangulé la formule d'Euler 3.1 n'est plus valable mais il est possible de donner une décomposition semblable à la précédente si $\mathcal{T}$ est orientable. Il suffit pour cela d'adapter la notion de contour de niveau :
Si $a = (s_1, s_2)$ est une arête transverse au niveau c_0 nous définissons comme dans la remarque 3.1 une face de sortie f_s et une face d'entrée f_e (voir figure 3.15). L'arête de sortie (resp.

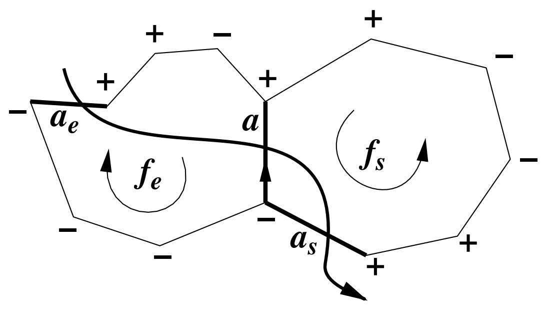


FIG. 3.15 – L'arête de sortie (resp. d'entrée) a_s (resp. a_e) est alors la première arête rencontrée transverse à c_0...

d'entrée) a_s (resp. a_e) est alors la première arête rencontrée, transverse à c_0, en parcourant les arêtes de f_s (resp. f_e) dans le sens positif (resp. négatif) relativement à l'orientation de a et $\mathcal{T}$.

Avec cette convention les arêtes a_e, a et a_s ne sont plus adjacentes dans $\mathcal{A}$ mais le sont pour la relation qui lie deux arêtes incidentes à une même face. Ce nouveau graphe est celui de $\mathcal{A}$ complété par les cliques des faces de $\mathcal{A}$ correspondant à des faces de $\mathcal{T}$. Il n'est a priori pas plongeable dans un polyèdre. Dans ce nouveau graphe, les contours de niveau ne sont plus des cycles simples mais la convention ci-dessus permet de les parcourir une seule fois !

3.3.6 Cas des triangulations non coloriées

Lorsque $\mathcal{T}$ est triangulé mais que la fonction numérique c n'est pas un coloriage (i.e. deux sommets adjacents peuvent avoir la même valeur), les propositions 3.2 et 3.1 sont toujours vraies, mais nous n'avons plus de décomposition en bandelettes (dont l'adhérence recouvre $\mathcal{T}$). Une fonction constante n'a, par exemple, aucune ligne de niveau puisqu'il n'existe pas de valeur régulière comprise entre les extremums de cette fonction...

Par contre dans le cas particulier de la distance à un point source sur $\mathcal{T}$, un sommet ne peut avoir tous ses voisins à la même distance. On en déduit une décomposition formée de bandelettes cylindriques et de faces entourées de sommets équidistants de la source, et l'adhérence de cette décomposition recouvre entièrement $\mathcal{T}$.

3.4 Application au coloriage par la distance géodésique

Nous supposerons désormais que la valeur d'un sommet est obtenue par l'algorithme de Dijkstra comme distance géodésique à un sommet source s. Notons que cette spécialisation n'est pas purement anecdotique car l'application distance géodésique à un point source est définie de manière canonique sur une variété riemanienne (complète) pointée. Dans le cadre combinatoire ceci s'interprète par le fait que sur un graphe non plongé ayant des arêtes valuées (l'équivalent de la métrique) et pour lequel on a distingué un sommet, on peut définir algorithmiquement (par l'algorithme de Dijkstra) une distance géodésique.

Nous déduirons des propriétés de l'algorithme de Dijkstra un moyen simple de calculer les contours de niveau.

Remarquons que la distance géodésique d n'est pas nécessairement un coloriage car des sommets adjacents peuvent être à une même distance de la source, mais on peut s'y ramener en utilisant le lemme suivant :

Lemme 3.2 *Pour toute fonction numérique d sur $\mathcal{T}$ on peut en déduire en un temps $\mathcal{O}(n \log n)$*

un coloriage c de sorte que :

$$d(s_i) < d(s_j) \qquad \Rightarrow \qquad c(s_i) < c(s_j) \tag{3.3}$$

Démonstration : Il suffit d'ordonner les n sommets de $\mathcal{T}$ par ordre de distance croissante. Puis par récurrence on pose :

$$\begin{array}{rcl} c(s_i) = d(s_i) & \text{si} & d(s_i) < d(s_{i+1}) \\ c(s_i) = d(s_i) - \epsilon & \text{si} & d(s_i) = d(s_{i+1}) \end{array}$$

avec $\epsilon < d(s_i) - d(s_{i-1})$ □

Si d est obtenue par l'algorithme de Dijkstra on peut d'ailleurs construire le coloriage lors du calcul des distances puisque dans cet algorithme les sommets sont "découverts" par ordre croissant de distance.

Remarque 3.3 *Un chemin strictement monotone pour d l'est donc pour c. En particulier les géodésiques fournies par l'algorithme de Dijkstra donnent des chemins strictement décroissants pour c, en supposant que deux sommets adjacents de $\mathcal{T}$ n'ont pas les mêmes coordonnées dans $\mathbb{R}^3$.*

Dans la pratique nous ne nous intéresserons, pour les métamorphoses, qu'à des objets de topologie sphérique et **nous supposerons désormais que $\mathcal{T}$ a une topologie sphérique**.

Nous avons alors :

Proposition 3.5 *Si le contour de niveau c_0 a p composantes connexes, i.e est constitué de p cycles, alors toute réalisation de $\mathcal{C}_{c_0}$ sépare $\mathcal{T}$ en $p+1$ composantes connexes. Elles sont formées d'une composante qui contient tous les sommets de couleur inférieure à c_0, dont la source, et de p calottes bordées par chacune des composantes du contour. De plus ces p calottes contiennent chacune au moins un maximum local.*

Démonstration : Notons $\mathcal{C}^1, \ldots, \mathcal{C}^p$ les p composantes de $\mathcal{C}_{c_0}$ et $\mathcal{C}^0_-$ le graphe restreint aux sommets de couleur inférieure à c_0. Puisque $\mathcal{T}$ a une topologie sphérique, $\mathcal{C}^i$ sépare $\mathcal{T}$ en deux composantes connexes homéomorphes à des disques. Nous notons $\mathcal{C}^i_+$ celle qui ne contient pas la source s (voir figure 3.16).

- Ces composantes sont disjointes deux à deux. En effet, supposons par l'absurde que :

  $$p \in \mathcal{C}^i_+ \cap \mathcal{C}^j_+$$

  alors l'algorithme de Dijkstra fournit un chemin strictement décroissant de p vers la source qui ne rencontre $\mathcal{C}_{c_0}$ qu'une seule fois. On en déduit que ce chemin ne rencontre pas l'une des deux composantes $\mathcal{C}^i$ ou $\mathcal{C}^j$ ce qui contredit la propriété de séparation de $\mathcal{C}^i$ ou $\mathcal{C}^j$.

- Chaque $\mathcal{C}_+^i$ contient un maximum local : en effet soit s_i un sommet de $\mathcal{C}_+^i$ qui réalise le maximum de c sur $\mathcal{C}_+^i$. Un voisin s_j de s_i est ou bien dans $\mathcal{C}_+^i$, et donc de couleur inférieure, ou bien tel que l'arête (s_j, s_i) est transverse à c_0 et on a nécessairement (voir figure 3.16) :
$$c(s_j) < c_0 < c(s_i)$$

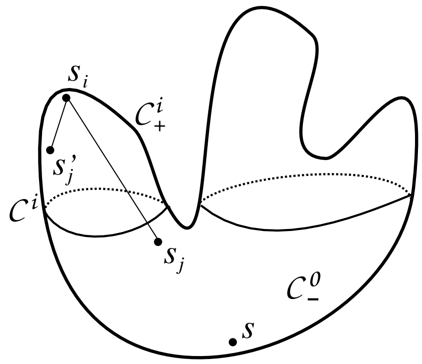


FIG. 3.16 – Les voisins de s_i ont une couleur inférieure à $c(s_i)$.

- $\mathcal{C}_-^0$ ne rencontre aucun des $\mathcal{C}_+^i$: chaque sommet de $\mathcal{C}_-^0$ est en effet joint à la source par un chemin strictement décroissant qui ne rencontre pas les contours $\mathcal{C}^i$, ce qui montre d'ailleurs que $\mathcal{C}_-^0$ est connexe.

- Un sommet qui n'est pas dans $\mathcal{C}_-^0$, donc de couleur supérieure à c_0, est dans l'une des $\mathcal{C}_+^i$: il existe un chemin strictement décroissant (une géodésique) vers la source qui rencontre une fois $\mathcal{C}_{c_0}$ donc l'un des $\mathcal{C}^i$; ce sommet est dans la composante déterminée par $\mathcal{C}^i$ qui ne contient pas la source, i.e. dans $\mathcal{C}_+^i$.

On déduit de ceci que $\mathcal{C}_-^0, \mathcal{C}_+^1, \ldots, \mathcal{C}_+^p$ réalise la partition de $\mathcal{T}$ recherchée □

Lemme 3.3 *Pour tout sommet σ de $\mathcal{T}$ l'ensemble des arêtes incidentes à σ et transverses à un niveau c_0 inférieur à $c(\sigma)$ appartiennent à un même cycle de $\mathcal{C}_{c_0}$.*

Démonstration : Soient $a_i = (s_i, \sigma)$ et $a_j = (s_j, \sigma)$ deux arêtes transverses au niveau c_0. Soit $\mathcal{C}^i$ (resp. $\mathcal{C}^j$) la composante de $\mathcal{C}_{c_0}$ contenant a_i (resp. a_j).

Toute réalisation de $\mathcal{C}^i$ sépare $\mathcal{T}$ en deux composantes connexes dont l'une contient la source s et l'autre σ. Il en est de même pour $\mathcal{C}^j$. Nous avons donc deux cycles (confondus ou disjoints) sur une sphère dont les deux composantes respectives ont un point en commun. On en déduit que l'un des cycles, par exemple $\mathcal{C}^j$, entoure l'autre qui entoure σ (c.f. figure 3.17). L'arête a_j rencontre donc $\mathcal{C}^i$ et par conséquent $\mathcal{C}^i = \mathcal{C}^j$ □

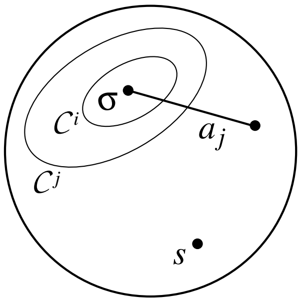


FIG. 3.17 – $\mathcal{C}^j$ entoure $\mathcal{C}^i$ qui entoure σ et $\mathcal{C}^i$ entoure $\mathcal{C}^j$ qui entoure s !

En utilisant les notations de la proposition 3.3 et en notant n_i le nombre de cycles de $\mathcal{C}_i$, on déduit du lemme précédent proposition suivante :

Proposition 3.6 *Pour tout i tel que $c(s_i) < c(s_{i+1})$ nous avons :*

$$n_{i+1} = n_i - \sum_{c(s_j)=c(s_i)} Ind_c(s_j)$$

Démonstration : Soient $s_{i-p}, \ldots, s_i$ les sommets de couleur $c(s_i)$, on peut par le procédé du lemme 3.2 trouver un coloriage c' tel que $c'(s_{i-p}) < c'(s_{i-p+1}) < \ldots < c'(s_i)$ et tel que $n_i = n'_{i-p}$ et $n_{i+1} = n'_{i+1}$. Nous pouvons donc supposer que $c(s_{i-1}) < c(s_i) < c(s_{i+1})$.

- Si $Ind_c(s_i) = 0$ alors la proposition 3.3 permet de conclure,
- si $Ind_c(s_i) = 1$ alors la remarque 3.2, section 3.3.3 permet de conclure,
- si $Ind_c(s_i) < 0$ le lemme 3.3 précédent montre que l'on a nécessairement la configuration de la figure 3.18 (le lecteur pourra généraliser par lui-même...) □

3.4.1 Algorithme

Nous présentons un algorithme qui, à partir de la donnée d'un polyèdre $\mathcal{T}$ triangulé et orientable, d'un point source et des distances géodésiques associées, calcule progressivement tous les contours $\mathcal{C}_i$ et une représentation associée.

Ceci est effectué en examinant successivement les sommets du polyèdre triés par ordre croissant de distance et en initialisant le contour $\mathcal{C}_i$ avec le cycle des arêtes incidentes à la

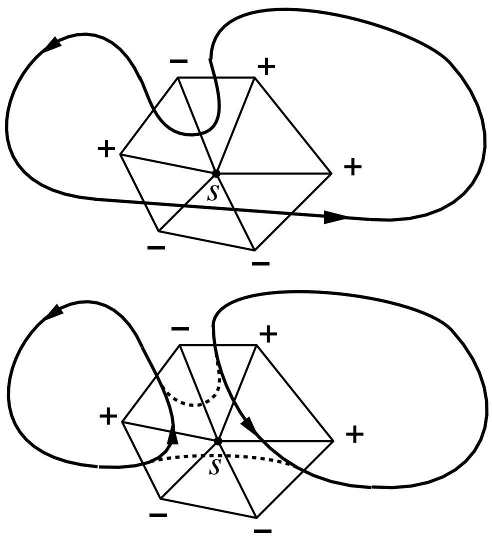


FIG. 3.18 – Au dessus : la ligne de niveau légèrement inférieur à $c(s_i)$. En dessous :en trait plein, la ligne de niveau légèrement supérieur à $c(s_i)$. L'indice du sommet vaut -1 et il y a 1 création de cycle.

source. À chaque nouveau sommet examiné, on réactualise la liste des cycles en fonction de son indice. À la fin de l'algorithme la liste est formée des cycles entourant les maximums globaux.

Par mesure de concision, nous dirons qu'une arête, incidente à un sommet s, est **négative** (relativement à s) si son autre sommet a une couleur inférieure à $c(s)$ et nous dirons qu'elle est **positive** dans le cas contraire. L'ensemble des arêtes incidentes à s forment un cycle ordonné circulairement. Dans ce cycle nous appellerons **chaîne d'arêtes positives** un ensemble maximal d'arêtes positives connectées dans $\mathcal{A}$.

De plus, en reprenant les notations de la proposition 3.3, pour un sommet s_i, le lemme 3.3 montre que dans le contour $\mathcal{C}_i$ toutes les arêtes négatives de s_i appartiennent à un même cycle. Nous notons $\mathcal{C}^i$ ce cycle.

Les n sommets de $\mathcal{T}$ sont indexés par ordre de distance. L'algorithme se présente comme suit :

Initialisation : le contour courant est initialisé au cycle des arêtes incidentes à la source s_1.

Boucle principale : pour chaque sommet s_i on détermine le cycle ordonné circulairement de ses arêtes incidentes, on en déduit son indice, puis

1. on met à jour le contour courant en fonction de cet indice :

   - si $Ind_c(s_i) = 1$: alors s_i est un maximum local et il faut détruire le cycle des arêtes incidentes à s_i (ce cycle fait nécessairement partie de la liste des cycles du contour courant et coïncide avec $\mathcal{C}^i$).
   - si $Ind_c(s_i) = 0$: alors s_i est un sommet régulier et il faut juste réactualiser le cycle $\mathcal{C}^i$. Pour cela on substitue la chaîne des arêtes positives de s_i à la chaîne de ses arêtes négatives dans le cycle $\mathcal{C}^i$ (c.f. figure 3.13).
   - si $Ind_c(s_i) < 0$: alors s_i est un sommet singulier de type selle. D'après la proposition 3.6 il y a création de $-Ind_c(s_i)$ cycles. Il faut également réactualiser le cycle $\mathcal{C}^i$. Pour cela, on parcourt la liste des arêtes incidentes à s_i, puis :
     – on substitue la première chaîne d'arêtes positives rencontrée à la chaîne comprise entre les deux arêtes négatives bordantes (c.f. figure 3.19) afin de réactualiser le cycle $\mathcal{C}^i$,

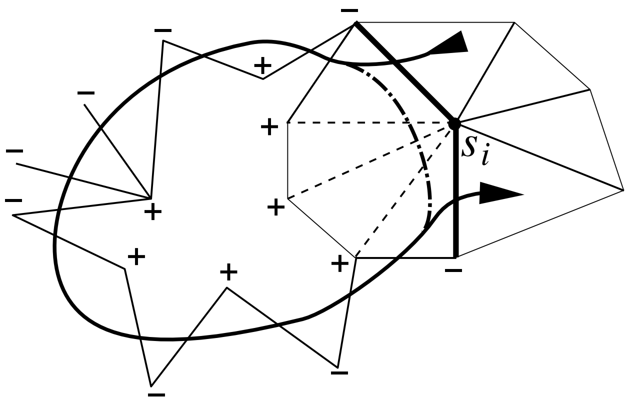


FIG. 3.19 – Les arêtes en pointillés se substituent aux arêtes en trait plein et gras et le cycle est coupé à cet endroit.

     – puis, pour chaque nouvelle chaîne d'arêtes positives rencontrée, il faut créer un nouveau cycle avec le reste des arêtes du cycle initial $\mathcal{C}^i$ et faire la substitution précédente.

Par ailleurs pour retrouver le cycle $\mathcal{C}^i$, dans la liste du contour courant, il est nécessaire de le lier à l'une (et une seule) des arêtes qui le composent. La mise à jour de ce lien dépend de l'indice de s_i :

- si $Ind_c(s_i) = 1$, il suffit de retrouver ce lien parmi les arêtes incidentes à s_i avant de le désactiver,
- si $Ind_c(s_i) = 0$, il suffit de tester si une des arêtes négatives (de s_i) est liée à son cycle. Si c'est le cas il faut remplacer ce lien par l'une des arêtes positives substituées.
- si $Ind_c(s_i) < 0$, il faut éventuellement parcourir tout le cycle $\mathcal{C}^i$ contenant les arêtes négatives pour retrouver ce lien et le changer avec l'une des arêtes positives de la première chaîne rencontrée.

2. on réalise le contour trouvé en parcourant chacun de ses cycles.

Le pré-calcul de l'indice et des arêtes incidentes à un sommet n'est pas vraiment utile mais il facilite la lecture de l'algorithme sans en augmenter la complexité.

Les structures de données : d'après notre présentation il est clair que la structure de données du polyèdre doit mettre en valeur ses arêtes. Nous choisissons une structure d'arêtes ailées ([Bau75]) comme sur la figure 3.20. Chaque arête a également un pointeur vers une

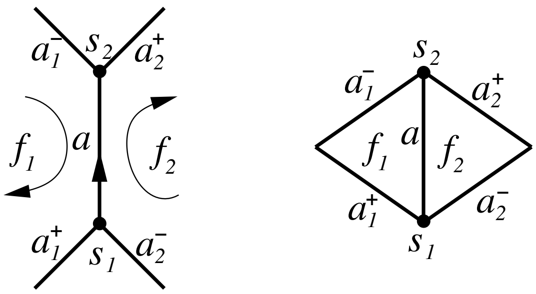


FIG. 3.20 – À gauche : la structure d'arête ailée pour un polyèdre orientable. À droite : le cas d'une triangulation.

arête suivante (resp. prédécesseur) pour l'éventuel cycle la contenant. On ajoute enfin un pointeur vers ce cycle. Nous avons ainsi la structure suivante pour une arête orientée (s_1, s_2) avec $c(s_1) < c(s_2)$:

SOMMET* s_1	SOMMET* s_2
ARETE* a_1^-	ARETE* a_2^-
ARETE* a_1^+	ARETE* a_2^+
ARETE* PRED	ARETE* SUIV
-	CYCLE* C

PRED, SUIV et le cycle courant C sont initialisés à NIL.

Un contour est une liste chaînée de cycles et un cycle est un pointeur vers l'une de ses arêtes. Cette arête pointe en retour sur son cycle.

Par ailleurs nous conservons un tableau des sommets ordonnés par la couleur. Chaque sommet pointe sur l'une quelconque des arêtes qui lui est incidente. La structure SOMMET est la suivante :

REEL x,y,z
REEL couleur
ARETE* a

Il est possible à partir de l'arête pointée par un sommet et de la structure de donnée en arêtes ailées de construire en temps et place $\mathcal{O}(k)$, la liste ordonnée circulairement dans le sens positif des k arêtes incidentes à ce sommet (voir [Bau75]). La structure de donnée AR_VOIS de la liste des arêtes voisines est

ARETE* a
AR_VOIS* prec
AR_VOIS* succ

Analyse de la complexité : pour chaque sommet nous devons

1. parcourir la liste de ses k_i arêtes incidentes pour faire les échanges de chaînes,
2. lorsque le sommet a un indice strictement négatif nous devons retrouver l'arête du cycle courant, de longueur l_i, qui fait le lien avec ce cycle,
3. pour réaliser le contour nous devons parcourir tous ses cycles d'arêtes ; nous notons L_i la longueur totale du contour courant.

Comme chaque arête est incidente à deux sommets nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \;=\; 2\,\#\text{ arêtes } \;=\; \mathcal{O}(n)$$

En notant m le nombre de sommet d'indices négatifs et

$$l = \max_i\, l_i \qquad \text{et} \qquad L = \max_i\, L_i$$

on a

$$\text{coût total} = \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{Ind(s_i)<0} l_i + \sum_{i=1}^{n} L_i = \mathcal{O}(n + ml + nL)$$

Dans le cas le pire nous pouvons avoir $\sum_{i=1}^{n} L_i = \mathcal{O}(n^2)$ comme sur l'exemple de la figure 3.21.

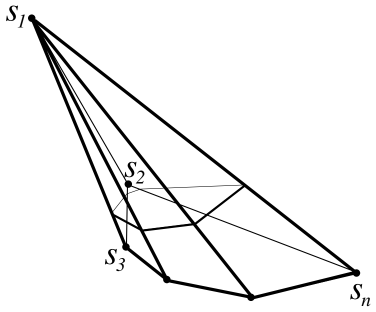


FIG. 3.21 – Un cône tronqué par un plan oblique et tel que $d(s_i) < d(s_{i+1})$.

3.4.2 Le cas pratique

Dans la pratique nous n'utilisons pas cet algorithme car :

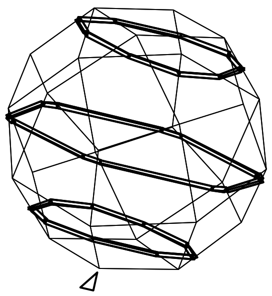
1. nous n'utilisons qu'un nombre donné à l'avance de lignes de niveau pour calculer l'axe de l'objet (ex : 100),
2. l'objet n'est pas nécessairement triangulé,
3. le graphe utilisé par l'algorithme de Dijkstra est le graphe du polyèdre complété par les cliques de chaque face,
4. On ne cherche pas à modifier la distance trouvée pour obtenir un coloriage.

Le premier point se justifie par le fait qu'un objet polyédrique est souvent défini par plusieurs centaines, voire plusieurs milliers de sommets et que nous n'avons pas besoin de tant de points pour définir une courbe.

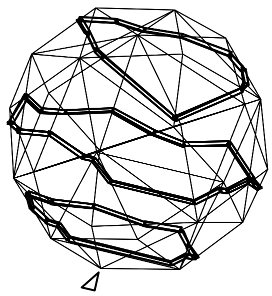
Le troisième point vient, comme nous l'avons déjà remarqué, du fait que la complétion du graphe du polyèdre par les cliques de ses faces fournit des distances plus proches des distances réelles lorsqu'on utilise l'algorithme de Dijkstra. Ceci apparaît clairement sur la figure 3.22. Sur cette figure l'objet est une sphère polygonalisée avec des quadrilatères. Les trois courbes de niveau correspondent respectivement à 25%, 50% et 75% de la distance maximales et sont représentées par des tubes fins.

Nous décrivons ici un algorithme plus adapté à notre besoin. Nous supposons que les faces du polyèdre, désormais noté $\mathcal{P}$, sont bien plongées, c'est à dire que deux sommets quelconques d'une même face n'ont pas les mêmes coordonnées dans $\mathbb{R}^3$.

Par mesure de concision nous appelons *Dijkstra modifié* l'algorithme de Dijkstra appliqué au graphe complété par les cliques des faces. Nous appelons **liaison** une arête de ce graphe complété pour ne pas la confondre avec les arêtes de $\mathcal{P}$. Remarquons cependant que toute arête est une liaison.



Les faces du polyèdre sont des quadrilatères. Elles sont complétées par leurs deux diagonales non visibles sur la figure.



Le polyèdre est triangulé avant l'application de l'algorithme de Dijkstra.

FIG. 3.22 – Trois courbes de niveau. Le petit triangle indique le point source.

Enfin, nous notons d la fonction distance au point source sur P qui n'est plus nécessairement un coloriage.

Problème à résoudre : on cherche à construire p lignes de niveau équiréparties sur le polyèdre.

Principe de l'algorithme : on repère les maximums locaux et on détermine la plus grande distance notée d_M. Nous devons construire les p lignes de niveau $d_i = \frac{i}{p+1} d_M$ pour $i = 1, \ldots, p$. Pour cela on redescend à partir de chaque maximum local le long de sa géodésique (donnée par Dijkstra modifié) jusqu'à rencontrer une liaison (σ_1, σ_2) telle que

$$d(\sigma_1) < d_i \leq d(\sigma_2) \tag{3.4}$$

La seconde inégalité de 3.4 n'est pas stricte car il se peut que d_i soit égale à la distance d'un ou plusieurs sommets. Nous pouvons cependant conserver stricte la première inégalité d'après l'hypothèse de bon plongement des faces.

Si la liaison (σ_1, σ_2) fait partie d'une clique d'une face f de $\mathcal{P}$, on en déduit une arête de f (et de $\mathcal{P}$) vérifiant 3.4 (c.f. figure 3.23). Il suffit pour cela de parcourir la liste ordonnée circulairement des arêtes de f, à partir d'une arête incidente à σ_1, jusqu'à rencontrer une arête a_i^0 vérifiant 3.4. L'arête a_i^0 sert de point de départ à la construction d'un cycle de niveau d_i.

La construction d'un cycle fonctionne toujours sur le même principe :

pour une arête a vérifiant 3.4, l'orientation de a et de $\mathcal{P}$ permet de discriminer sur chacune des deux faces incidentes une arête de sortie a_s et une arête d'entrée a_e comme sur

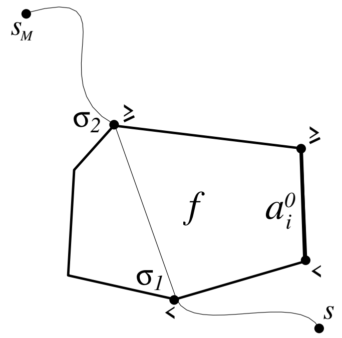


FIG. 3.23 – Le long de la géodésique d'un maximum local s_M on rencontre une face qui contient une arête du contour cherché.

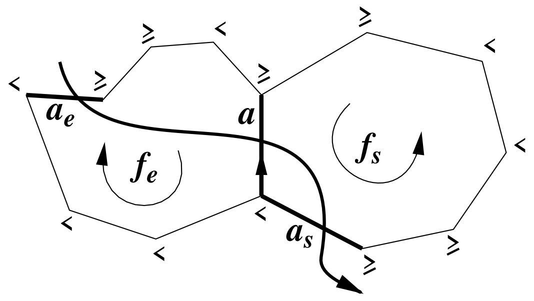


FIG. 3.24 – L'orientation de a et de $\mathcal{P}$ permet de distinguer une face f_s et f_e.

la figure 3.24. Partant de l'arête a_i^0 on progresse par l'une de ses arêtes de sortie jusqu'à rencontrer à nouveau l'arête a_i^0.

Remarque 3.4 *Lorsque $\mathcal{P}$ est une triangulation et d_i n'est pas égale à la distance d'un sommet ce procédé de descente à partir des maximums locaux permet d'obtenir* **tous** *les cycles de niveau d_i. En effet la proposition 3.5 reste vraie, que d soit un coloriage ou non. Pour chaque cycle de $\mathcal{C}_{d_i}$ la géodésique associée à l'un de ses maximums internes le rencontre en une arête qui est celle choisie comme point de départ. Deux maximums locaux donnent ainsi lieu à deux cycles disjoints ou confondus.*

3.5 Création d'axe

Nous avons montré comment obtenir des lignes de niveau sur un objet à partir de la distance géodésique à un point source. Ces lignes de niveau nous servent à définir des points de l'axe de l'objet par moyennage. Puis nous interpolons cette liste de points (ordonnée) à l'aide d'une courbe spline.

Nous proposons à l'utilisateur quelques fonctionnalités pour modifier cet axe :

- au lieu de répartir les niveaux entre la source (de distance nulle) et le sommet le plus éloigné (de distance d_M), il peut spécifier deux pourcentages α et β de d_M entre lesquels répartir les lignes de niveau. Ceci permet d'agrandir les calottes aux extrémités de la partie cylindrique déterminée par l'axe.
- Il a également le choix entre plusieurs modes de moyennages des contours.
- Il peut désigner un sommet quelconque comme point source à l'aide de la souris.

Dans notre implémentation le moyennage d'une ligne de niveau peut être obtenu

- par son barycentre, c'est à dire comme le barycentre des milieux des segments qui la composent, pondérés par la longueur de ces segments,
- ou comme le point le plus proche des droites supports de chaque segment, pondérés par leur longueur.

Dans les deux cas, il s'agit d'une heuristique pour obtenir un point "centré" par rapport au contour.

3.5.1 Quelques résultats

Nous présentons différents calculs d'axes pour un cygne. Ce dernier est composé de 1728 facettes et est présenté vu de face, gauche et dessus dans la partie supérieure de la figure 3.25.

- Dans la partie inférieure de la figure 3.25, 20 lignes de niveau ont été construites, réparties entre 5% et 90% de la longueur maximale à partir du point source situé à l'extrémité du bec (repéré par le triangle blanc sur la figure 3.27). L'axe correspondant est représenté sous la forme d'un tube mince. Le moyennage des courbes de niveau est effectué à l'aide de leur barycentre. Les temps de calculs pour l'axe (et les courbes de niveau) sont de l'ordre de la fraction de seconde sur un machine SGI INDIGO2.
- La figure 3.26 illustre la bonne stabilité du calcul de l'axe en fonction du point source. Ici deux axes ont été calculés à partir de deux points sources indiqués par les triangles blanc et noir. On peut remarquer que les axes diffèrent sur le premier tiers de leur longueur et sont quasiment confondus dans la suite.

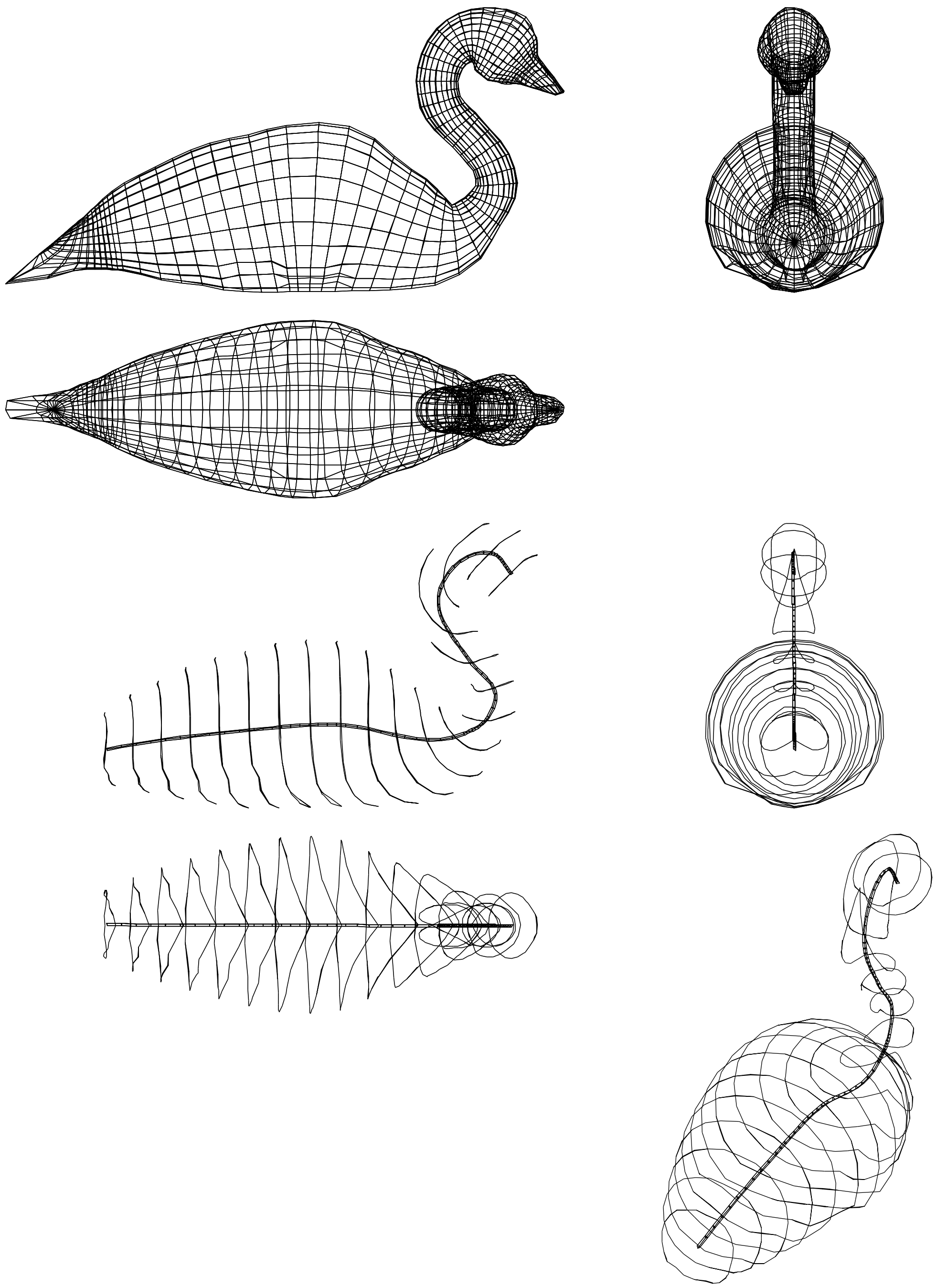


FIG. 3.25 – Un cygne, son axe et 20 courbes de niveau.

- Le calcul du centre des contours influe sur l'axe. Ceci est montré sur la figure 3.27.

Le calcul des courbes de niveau ne dépend pas du plongement de l'objet mais seulement de son graphe et de la longueur de ses arêtes. Ceci peut s'observer sur la figure 3.28 où l'objet

FIG. 3.26 – À gauche : les flèches noires et blanches désignent les deux points sources utilisés pour le calcul de l'axe. Au milieu : les deux axes correspondant sont représentés sur la même figure. À droite : un détail de la figure du milieu.

Calcul de l'axe par moyennage avec le barycentre.

Calcul de l'axe par moyennage avec le point le plus proche des droites supports de chaque segments.

FIG. 3.27 – Deux calculs d'axe.

s'autointersecte plusieurs fois sans que cela crée de difficulté pour le calcul de l'axe.

Nous terminons cette section sur quelques exemples donnés figure 3.29...

3.5.2 À propos du centrage

L'axe que nous avons construit à l'aide des lignes de niveau ne répond pas à la condition d'étoilement qui permet le paramétrage voulu de la surface de l'objet. Comme précisé dans l'introduction de cette partie, nous n'avons pas réussi à construire un tel axe. Voici cependant quelques éléments de réponse pouvant ouvrir sur des voies de recherche.

D'après la forme de la paramétrisation recherchée (voir l'introduction de la partie II), l'axe doit vérifier deux conditions en chacun de ses points $\gamma(s)$:

1. une condition d'étoilement : le plan normal à $\gamma(s)$, noté $\mathcal{P}_s$, doit intersecter l'objet selon

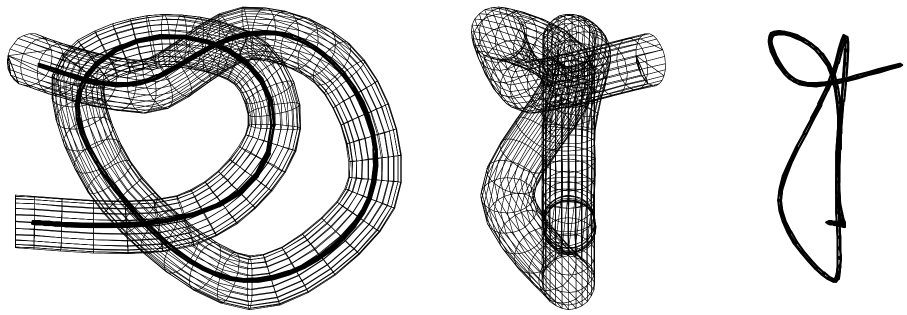
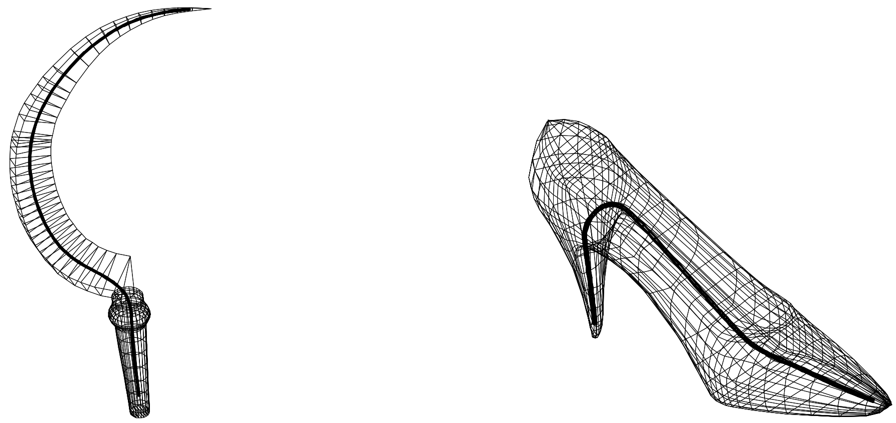


FIG. 3.28 – À gauche : une vue de face de l'objet et l'axe calculé en trait épais. Au milieu : une vue latérale de l'objet. À droite : la même vue de l'axe.



Une faucille et son axe   Un escarpin et son axe

FIG. 3.29 – Autres exemples de calcul d'axe.

une courbe telle que la composante $\mathcal{C}(s)$ contenant $\gamma(s)$ soit étoilée par rapport à ce point,

2. une condition de bon attachement (voir section 2.2 de la partie III) : la binormale en $\gamma(s)$ translatée au centre de courbure en $\gamma(s)$ sépare le plan normal $\mathcal{P}_s$ en deux demi-plans dont l'un doit contenir la composante $\mathcal{C}(s)$ (voir figure 3.30 droite).

Nous allons exprimer ces deux conditions sous forme de l'annulation d'une certaine fonctionnelle.

Considérons tout d'abord la condition d'étoilement. Nous supposerons pour cela que $\mathcal{C}(s)$ est une courbe fermée possédant partout une tangente[8].

8. Une condition suffisante est que le plan normal $\mathcal{P}_s$ intersecte transversalement l'objet. Cette condition

$\mathcal{C}(s)$ sépare $\mathcal{P}_s$ en deux composantes connexes : l'intérieur qui est borné et l'extérieur de $\mathcal{C}(s)$. En chaque point p de $\mathcal{C}(s)$, nous notons $\mathbf{n}_p$ la normale extérieure à $\mathcal{C}(s)$ (voir figure 3.30 gauche). La condition d'étoilement $\mathcal{C}(s)$ par rapport à $\gamma(s)$ se traduit ainsi par :

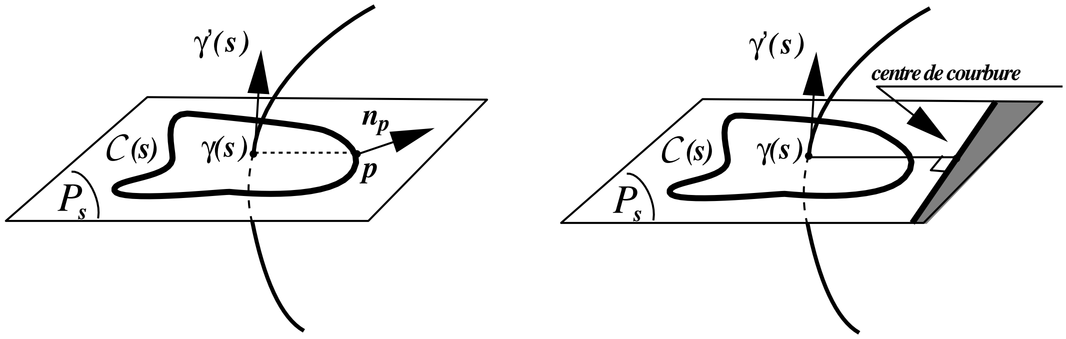


FIG. 3.30 – À gauche : la condition d'étoilement se traduit par $\langle \gamma(s)p, \mathbf{n}_p \rangle > 0$. À droite : la condition de régularité du paramétrage se traduit par la position de $\mathcal{C}(s)$ par rapport à la binormale translatée au centre de courbure.

$$\langle \gamma(s)p, \mathbf{n}_p \rangle > 0 \tag{3.5}$$

pour tout point p de $\mathcal{C}(s)$.

Soit alors $f_s : \mathcal{C}(s) \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable telle que

$$\begin{cases} f_s(p) = 0 & \text{si } p \text{ vérifie (3.5)} \\ f_s(p) > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $\mathcal{C}(s)$ est étoilé par rapport à $\gamma(s)$ si et seulement si

$$\int_{\mathcal{C}(s)} f_s = 0$$

Remarque 3.5 *Nous pouvons par exemple choisir*

$$f_{1,s}(p) = \langle \gamma(s)p, \mathbf{n}_p \rangle^2 \qquad si \qquad \langle \gamma(s)p, \mathbf{n}_p \rangle > 0$$

ou encore

$$f_{2,s}(p) = \|\gamma(s)p\|^2 \qquad si \qquad \langle \gamma(s)p, \mathbf{n}_p \rangle > 0$$

Nous avons

$$\int_{\mathcal{C}(s)} \langle \gamma(s)p, \mathbf{n}_p \rangle^2 \geq \int_{\mathcal{C}(s)} f_{1,s}$$

est clairement générique, c'est-à-dire vérifiée par "presque tous" les plans.

et

$$\int_{\mathcal{C}(s)} \|\gamma(s)p\|^2 \geq \int_{\mathcal{C}(s)} f_{2,s}$$

Les deux moyennages des lignes de niveau proposés précédemment (le point le plus proche des droites supports de chaque segment ou le barycentre) correspondent respectivement au minimum de ces deux intégrales lorsqu'on fait varier $\gamma(s)$. Notons par ailleurs que rechercher directement un centre d'étoilement des courbes de niveau n'a pas de sens car elles ne sont généralement pas planes.

La seconde condition de bon attachement traduit le fait que l'objet est localement paramétrable par γ. Elle sera vérifiée si

$$1 - \frac{1}{\|\gamma'(s)\|^2}\langle\gamma''(s), \gamma(s)p\rangle > 0 \tag{3.6}$$

pour tout point p de $\mathcal{C}(s)$.

Comme précédemment considérons $g_s : \mathcal{C}(s) \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable telle que

$$\begin{cases} g_s(p) = 0 & \text{si } p \text{ vérifie (3.6)} \\ g_s(p) > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $\mathcal{C}(s)$ vérifie la condition de paramétrisation locale si et seulement si

$$\int_{\mathcal{C}(s)} g_s = 0$$

Nous pouvons par exemple choisir

$$g_s(p) = (1 - \frac{1}{\|\gamma'(s)\|^2}\langle\gamma''(s), \gamma(s)p\rangle)^2 \qquad \text{si} \qquad \langle\gamma(s)p, \mathbf{n}_p\rangle > 0$$

Finalement l'axe γ sera considéré comme valide s'il vérifie

$$\int_\gamma \int_{\mathcal{C}(s)} f_s + \int_\gamma \int_{\mathcal{C}(s)} g_s = 0$$

et si l'union des $\mathcal{C}(s)$ recouvre l'objet éventuellement privé de deux calottes étoilées par rapport à chaque extrémité de γ.

En posant

$$F(s, \gamma, \gamma') = \int_{\mathcal{C}(s)} f_s \qquad \text{et} \qquad G(s, \gamma, \gamma', \gamma'') = \int_{\mathcal{C}(s)} g_s$$

l'équation précédente devient

$$\int_0^1 F(s, \gamma, \gamma')\, ds + \int_0^1 G(s, \gamma, \gamma', \gamma'')\, ds = 0 \tag{3.7}$$

Comme F et G ne sont pas négatives nous pouvons essayer de nous placer dans un contexte de calcul variationnel en cherchant un chemin γ qui réalise le minimum du membre de gauche de (3.7). Pour cela nous pouvons placer la recherche dans un espace de Sobolev du type $H^2([0,1])$ (c.f. [Bre83]) en fixant les deux extrémités des chemins. La complexité des fonctionnelles F et G est cependant assez décourageante. On notera en particulier que le domaine d'intégration $\mathcal{C}(s)$ est fonction (implicite !) de $\gamma(s)$ et $\gamma'(s)$.

Une approche similaire a pourtant été proposée [SV90] pour rechercher une courbe squelette d'un contour plan. Ce cadre qui est largement plus simple puisque $\mathcal{C}(s)$ est réduit dans ce cas à deux points, donne lieu à une méthode de minimisation assez farfelue qui fait intervenir un calcul discret en parallèle sur une grille 2D où chaque arête est associée à un processeur.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini une méthode originale pour associer une structure axiale à un objet polyédrique. Pour cela nous avons en quelque sorte parcouru un chemin inverse à celui emprunté pour la reconstruction de surface à partir de contours ([CS78, Boi88, MSS92]) puisque nous avons obtenu des contours à partir d'une surface connue.

Les principales étapes pour la construction de l'axe d'un objet sont :

1. la désignation interactive d'un point source sur l'objet,
2. le calcul des distances géodésiques à ce point source par l'algorithme de Dijkstra,
3. le calcul et moyennage des cercles géodésiques à l'aide de l'algorithme exposé dans la section 3.4.2.

Les problèmes liés à la détermination de contours nous ont menés à développer une analogie combinatoire avec la théorie des fonctions de Morse. Les concepts essentiels pour mener à bien cette analogie sont ceux de triangulation, ou plus généralement de complexe simplicial, et de coloriage à valeurs dans un ensemble ordonné. Ceci nous a permis de mettre en avant le calcul des lignes de niveau sous forme de cycles d'arêtes, ce qui n'a pas été envisagé dans les algorithmes de visualisation où les lignes de niveau semblent néanmoins être importantes.

Notons par ailleurs que nous pouvons adapter cette construction d'axe à une surface implicite. Pour cela, nous obtenons un échantillonnage de la surface implicite avec un système de particules [WH94] (une autre approche du type [DTG95] suffit quand les surfaces implicites sont générées par des squelettes). Puis nous construisons un graphe sur ces points échantillonnés en reliant chaque point à ces k (par exemple $k = 4$) plus proches voisins comme dans [Ped95]. On applique alors l'algorithme de Dijkstra à partir d'un point source sur ce graphe et on en déduit des ensembles de points equidistants de la source. Comme ce graphe n'est pas un polyèdre, ces ensembles de points ne sont pas structurés en cycles. On peut néanmoins les approximer par des courbes par des méthodes analogues à [Rou93] avant de moyenner ces courbes.

Par rapport à la notion classique d'axe médian notre méthode a l'avantage de fournir ipso facto une structure axiale. Cette méthode nécessite la distinction d'un point sur l'objet et la connaissance d'une métrique par opposition au plongement requis pour construire l'axe médian. Elle semble par ailleurs d'une grande stabilité par rapport aux objets pointés.

Il reste cependant que l'axe obtenu ne permet pas, dans le cas général de paramétrer l'objet comme voulu pour les métamorphoses. Une amélioration possible consiste à recentrer l'axe par des méthodes de type variationnelles où les contraintes d'étoilement et de courbure (c.f. section 3.5.2) sont exprimées sous forme de fonction à minimiser.