Troisième partie

Métamorphoses

Dans cette troisième et dernière partie nous présentons une technique de métamorphose. Cette technique s'applique à des objets de forme cylindrique qui sont *étoilés par rapport à une courbe*. Cette courbe sert à paramétrer et déformer les objets. Le paramétrage induit naturellement une correspondance entre les objets, et la déformation est obtenue par transformation des courbes associées à chaque objet.

Dans la première partie, nous avons montré comment effectuer cette transformation grâce à une homotopie régulière.

Dans la seconde partie nous avons fourni un outil pour obtenir une courbe "centrée" à l'intérieur d'un objet. Par la suite nous supposerons que les objets à métamorphoser sont munis d'une courbe convenable pour la condition d'étoilement.

Avant d'expliciter notre algorithme de métamorphose, nous passerons en revue les diverses méthodes qui ont été proposées en infographie ; puis nous positionnerons notre approche par rapport à ces méthodes.

Chapitre 1

État de l'art

Nous présentons les principales techniques de métamorphoses proposées en infographie. Nous distinguons deux familles d'algorithmes selon la (co)dimension des données à métamorphoser :

1. l'approche **volumique**, qui regroupe les métamorphoses d'images discrétisées (i.e. constituées de pixels) ou de volumes discrétisés (i.e. constitués de voxels),

2. l'approche **surfacique**, qui désigne les métamorphoses de courbes planes ou de surfaces de $\mathbb{R}^3$.

1.1 L'approche volumique

1.1.1 Métamorphoses bidimensionnelles

La méthode la plus efficace pour transformer des images pixels est sans doute celle décrite par T. Beier et S. Neely dans [BN92]. Une image pixels est un quadrillage rectangulaire dont chaque rectangle, ou pixel, possède une couleur uniforme. On peut considérer une image pixels comme un échantillonnage d'une application I de $\mathbb{R}^2$ dans l'espace des couleurs (c.f. figure 1.1). La couleur étant codée par trois nombres représentant des pourcentages de lumière rouge, verte et bleue, une image apparaît ainsi comme le graphe de l'application I de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. En ces termes la transformation d'une image s'interprète comme une interpolation de graphe. Une simple composition "verticale" de la forme

$$I_t(x,y) = C(I_0(x,y),\, I_1(x,y),\, t)$$

fournit dans la plupart des cas une image difficile à interpréter sur le plan sémantique (sic).

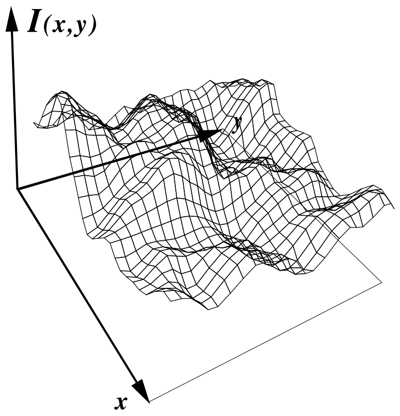

FIG. 1.1 – Le graphe associé à une image. Une seule composante de la couleur est représentée.

L'idée développée dans [BN92] est de se limiter à des images présentant les mêmes caractéristiques picturales. Intuitivement cette similarité exprime la possibilité de mettre en correspondance des traits caractéristiques (dans leur cas, des segments de droites) dans chacune des deux images. C'est le cas par exemple de deux images présentant chacune un visage vu sous le même angle, disons de face, puisqu'on peut mettre en correspondance des traits soulignant le nez, la bouche, les bords du visage...

Après une mise en correspondance des traits caractéristiques de deux images, les auteurs déforment le plan image xy de la première image (resp. la seconde) afin de surperposer ses traits caractéristiques avec ceux de la seconde image (resp. de la première image).

Après cette phase de déformation, qui porte le joli nom de *warping* en anglais, l'image interpolée est obtenue par composition des images déformées. Nous notons W_0 et W_1 les déformations respectives des deux images I_0 et I_1 (c.f. figure 1.2). Dans le cas idéal W_0 et W_1 sont inversibles et inverses l'une de l'autre. En s'inspirant du formalisme de [LCHS94] on a ainsi :

$$I_t(x, y) = C(I_0 \circ W_{t,0}(x, y),\, I_1 \circ W_{t,1}(x, y),\, t)$$

où $W_{t,0}$ est une homotopie entre l'identité et W_0 et où $W_{t,1}$ est une homotopie entre W_1 et l'identité. Dans [BN92] ces homotopies et la fonction C de composition sont des interpolations linéaires et les déformations W_0 et W_1 sont des sommes pondérées de déformations associées à chaque couple de traits caractéristiques.

Ces sommes pondérées ne respectent pas de façon précise la correspondance des traits caractéristiques. Pour remédier à ce défaut, S-Y Lee et al. [LCHS94] utilisent des modèles de surfaces déformables pour mettre en correspondance des points caractéristiques (au lieu de

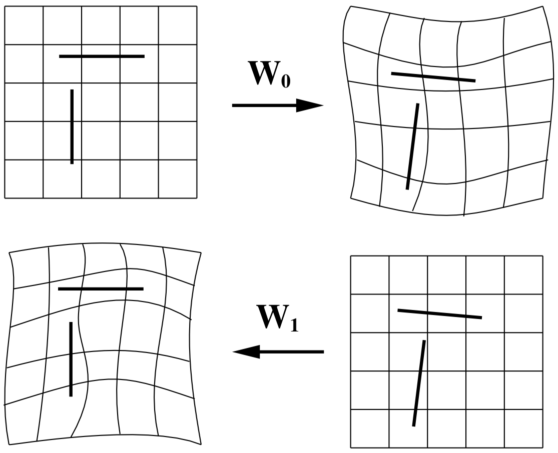

FIG. 1.2 – Les traits caractéristiques sont constitués de deux segments. Les déformations W_0 et W_1 ne sont pas nécessairement inverses l'une de l'autre.

segments comme dans [BN92]). Les auteurs permettent de plus à l'utilisateur, de spécifier un profil de transformation en certains points de l'image. Ceci permet d'effectuer des transitions à différentes vitesses dans l'image. Dans [LCHS94] on présente ainsi une transformation entre le visage d'une personne et la tête d'un chat où la partie gauche du visage est quasiment transformée en chat, tandis que celle de droite est encore peu déformée.

Dans [LCSW95] cette technique est encore améliorée : les traits caractéristiques ne sont plus simplement des points ou des segments de droites mais également des courbes (snakes) et les fonctions de déformation (warping) W_0 et W_1 sont calculées à partir de FFD [SP86] de manière à être bijectives.

Le résultat de ce type de métamorphose dépend en grande partie du choix et du positionnement des traits caractéristiques. Lorsque ce choix est judicieux cette méthode s'avère très efficace comme le montre son large emploi dans les vidéo-clips publicitaires. Il ne faut pas oublier cependant qu'il est essentiel, pour le bon fonctionnement de la méthode, que les deux images à métamorphoser aient des traits caractéristiques disposés de façon similaire.

1.1.2 Métamorphoses tridimensionnelles

Plusieurs méthodes ont été proposées pour métamorphoser des volumes de $\mathbb{R}^3$. Elles diffèrent beaucoup dans leur principe, et peuvent reposer sur une très grande interaction avec l'utilisateur comme dans [LGL95], ou au contraire ne nécessiter aucune spécification comme dans [Hug92] ou [KR91].

L'attrait principal et commun à toutes ces méthodes réside dans la résolution simple, en apparence, des changements de topologie au cours des transformations.

- En substituant le mot "voxel" à celui de "pixel" A. Lerios et al. [LGL95] ont étendu la méthode de [BN92]. Ici les traits caractéristiques ne sont plus simplement des segments de droites mais également des points, des rectangles et des parallélépipèdes rectangles. Cependant cette extension est moins opportune qu'elle ne le semble au premier abord car :

  1. le nombre de traits caractéristiques à positionner et mettre en correspondance est tel que l'aspect interactif devient excessivement lourd,
  2. la visualisation d'un volume discrétisé par le lancer de rayon nécessite la définition d'une opacité pour chaque voxel, en plus de sa couleur. En discrétisant une partie de l'espace contenant un objet solide opaque les voxels ont, logiquement, une opacité nulle à l'extérieur de l'objet, égale à 1 à l'intérieur de l'objet et comprise entre 0 et 1 si le voxel intersecte la frontière de l'objet. En interpolant deux volumes discrétisés on obtiendra donc, sauf coïncidence exceptionnelle, un grand nombre de voxels ayant une opacité comprise entre 0 et 1. Il en résulte une zone de flou dans l'image reconstituée qui ne permet pas de distinguer un objet précis.

  Cette technique s'apparente donc plus à une technique de mélange d'images qu'à une technique de métamorphose à proprement parler.

- J.F. Hughes [Hug92] propose une autre méthode de métamorphose de volume discrétisé à l'aide de la transformée de Fourier. Ici les objets sont vus comme des isosurfaces d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$ (ou plus exactement $\mathbb{Z}^3$). En notant $\mathcal{F}$ l'opération de transformée de Fourier, g_0 et g_1 deux fonctions définissant des objets, alors la fonction g_t définissant l'objet interpolé est donnée par :

  $$g_t = \mathcal{F}^{-1}(\, s(t,\omega)\,\mathcal{F}(g_0)(\omega) \;+\; (1 - s(t,\omega))\,\mathcal{F}(g_1)(\omega)\,)$$

  où ω représente un point du domaine fréquentiel et où $s(t,\omega)$ est une fonction comprise entre 0 et 1 qui dépend de la norme de la fréquence.

  L'intérêt du calcul dans le domaine fréquentiel provient d'une séparation possible entre les basses fréquences et les hautes fréquences dans le schéma d'interpolation $s(t,\omega)$. Néanmoins, le lien entre les composantes fréquentielles et la géométrie des objets est loin d'être évident, les calculs sont prohibitifs ($O(n^3 \log n)$ où n est le nombre de voxels d'un côté du volume discrétisé) et les résultats (i.e. les images fournies dans [Hug92]) semblent indiquer des problèmes numériques importants.

Dans cette approche les objets peuvent avoir des topologies différentes. Plus exactement les objets étant considérés comme des ensembles isovaleur de fonctions, ce sont ces fonctions qui sont interpolées et non les surfaces isovaleurs. Néanmoins les ensembles isovaleurs d'une fonction différentiable ne sont pas toujours des surfaces. Une condition suffisante est que la fonction soit une submersion sur l'ensemble isovaleur considéré. Cette condition est rarement prise en compte et son non respect peut générer des incohérences telles que l'apparition d'arêtes vives alors que les objets à métamorphoser sont parfaitement lisses ou encore l'apparition de faces ou d'arêtes pendantes...

Notons encore un problème posé par l'utilisation des volumes discrétisés : le calcul d'une image sur l'écran de l'ordinateur à partir de données voxels s'obtient usuellement par des techniques de lancé de rayons ou de polygonalisation. L'instabilité de ces techniques au cours du temps génère des effets de scintillements sur les contours des images et nécessite des techniques d'anti-crénelage temporel.

- Une autre approche volumique utilise la somme de Minkowski [KR91]. Le traitement proposé par A. Kaul et J. Rossignac dans [KR91] est surfacique mais il s'agit avant tout de combiner deux volumes par la somme de Minkowski.

  Rappelons que la somme de Minkowski de deux ensembles A et B d'un espace vectoriel est l'ensemble
  $$A \oplus B = \{a + b \,|\, a \in A \quad \text{et} \quad b \in B\}$$
  En notant $t.A$ l'homothétie de rapport t appliquée à A, l'interpolation de deux objets A_0 et A_1 est obtenue par
  $$A_t = (1-t).A_0 \,\oplus\, t.A_1$$
  On peut facilement vérifier que la frontière de la somme (de Minkowski) de deux objets fermés est incluse dans la frontière de la somme des frontières des objets. De ce fait on peut réaliser une interpolation basée sur les frontières des objets. A. Kaul et J. Rossignac proposent une interpolation de deux objets polyédriques A et B. Leur algorithme se fonde sur la propriété suivante :
  les faces F_t du polyèdre interpolé à l'instant t sont nécessairement de la forme
  $$\begin{aligned} F_t &= (1-t).s_A \oplus t.f_B \\ \text{ou } F_t &= (1-t).f_A \oplus t.s_B \\ \text{ou } F_t &= (1-t).a_A \oplus t.a_B \end{aligned}$$
  s, a et f désignant respectivement des sommets, arêtes ou faces des polyèdres (c.f. figure 1.3). Un critère sur la normale de F_t permet en plus de restreindre l'ensemble

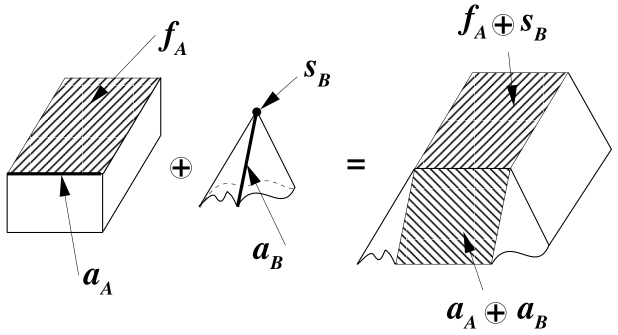

FIG. 1.3 – Différents types de faces dans la somme de Minkowski de deux polyèdres A et B (figure extraite de [KR91]).

des faces possibles.

La liste des faces F_t peut être construite en temps et place $O(n^2)$ si les polyèdres ont $O(n)$ faces. L'algorithme est amélioré lorsque les polyèdres sont convexes. L'animation est ensuite obtenue en affichant à tout instant les faces F_t par une technique de tampon de profondeur (z-buffer) car les faces F_t qui ne sont pas sur la frontière sont nécessairement à l'intérieur de l'objet interpolé.

Le principe des sommes de Minkowski est simple et se prête bien à un traitement algorithmique comme il est montré dans [KR91]. Il s'agit, à ma connaissance, de la seule méthode proposée capable de traiter des objets de forme et de topologie quelconque. Cette généralité s'obtient cependant au détriment du contrôle des déformations. En effet, ni l'échelle, ni la position relative des objets n'influent sur la forme des métamorphoses. Seule l'orientation relative des objets permet de les modifier.

Notons tout de même qu'il est possible de combiner des opérations d'homothétie et de somme de Minkowski pour produire des splines dont les points de contrôle sont des objets polyédriques [RK94]. Ceci permet effectivement de varier les transformations possibles entre deux objets, mais la complexité devient rapidement très importante ($O(n^4)$ pour une spline de degré 3).

1.2 L'approche surfacique

Nous incluons dans cette catégorie les transformations de courbes polygonales planes et de surfaces polyédriques de $\mathbb{R}^3$. Les travaux existants séparent le problème en deux parties :

1. **La mise en correspondance :** on établit une bijection entre les surfaces des deux objets à métamorphoser.

2. **L'interpolation** proprement dite : on définit la trajectoire (comprise entre deux sommets mis en correspondance) de chaque sommet de l'objet interpolé.

Ci-dessous, nous détaillons séparement les approches spécifiques aux courbes et aux surfaces.

1.2.1 Métamorphoses de contours

Le problème des métamorphoses de formes polygonales est assez proche de celui de la reconstruction de surface à partir de coupes planes [Boi88] et les deux applications se font souvent référence comme dans [CP89]. En effet, dans le cadre de la reconstruction de surface à partir de coupes, il faut relier (et donc mettre en correspondance) les points de chaque coupe pour reconstruire la surface. Les techniques de mise en correspondance font souvent appel au produit des graphes de chaque coupe et la recherche d'une correspondance se traduit par la recherche d'un chemin dans ce graphe, également appelé graphe torique (c.f. figure 1.4). En attribuant un coût aux arêtes de ce graphe on peut rechercher un chemin de coût

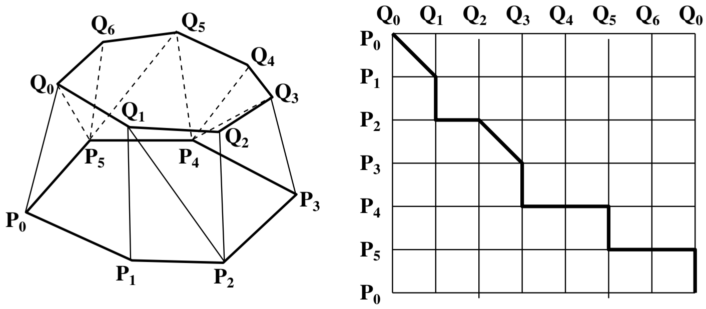

FIG. 1.4 – La mise en correspondance de deux contours P et Q peut être représentée par un graphe torique. Chaque point de ce graphe représente une arête de liaison entre les deux contours.

minimal et se ramener ainsi à un problème plus général [FKU77]. Dans [MSS92] les auteurs rappellent différentes expressions possibles de ces coûts et leur signification géométrique.

J.D. Boissonnat a proposé une approche volumique [Boi88] dans laquelle il reconstruit le volume séparant deux coupes à l'aide de la triangulation de Delaunay de l'ensemble formé par les sommets de ces coupes.

Une autre tendance consiste à appliquer chaque coupe sur une forme plus simple puis à utiliser ces formes simples pour la mise en correspondance. A. Ekoule et al. [EPO91] et S.E. Chen et R.E. Parent [CP89] utilisent par exemple une “projection” sur l'enveloppe convexe des coupes avant de mettre en correspondance ces enveloppes convexes.

En ce qui concerne les applications plus spécifiquement graphiques quelques approches ont été proposées :

- T.W. Sederberg et E. Greenwood [SG92] présentent une méthode de mise en correspondance automatique des sommets de 2 polygones simples. L'idée est d'associer les sommets des 2 polygones de sorte que le travail effectué pour "tordre" et "étirer" le premier polygone durant l'interpolation (supposée linéaire) soit minimal. L'expression du travail est issue d'un modèle physique de fil de fer extensible.

  Le problème de l'interpolation qui fait suite est résolu dans [SGWM93] à partir d'une interpolation linéaire des longueurs des arêtes et des angles aux sommets. Comme cette interpolation ne permet pas d'obtenir un contour fermé, les auteurs modifient l'interpolation des longueurs par un procédé de minimisation sous la contrainte de fermeture du polygone interpolé. Comme il est écrit à la fin de l'introduction de [SGWM93] :"The solution presented here is a heuristic whose justification lies in the fact that it generally seems to work well[1]".

- M. Shapira et A. Rappoport [SR95] proposent de résoudre le problème de l'interpolation à l'aide d'une décomposition des polygones en sous-parties étoilées. La mise en correspondance est supposée résolue au préalable : chaque polygone a donc le même nombre de sommets qui se correspondent deux à deux. Les décompositions de chaque polygone doivent être compatibles au sens où (c.f. figure 1.5) :

  – les sous-parties étoilées doivent se correspondre deux à deux et cette correspondance doit respecter les adjacences entre sous-parties,

  – les sommets de deux sous-parties associées doivent être en bijection en respectant les adjacences entre sommets,

  – deux sous-parties associées doivent admettre un point d'étoilement qui s'exprime de la même manière comme barycentre de sommets en bijection dans les deux sous-parties.

  L'algorithme pour réaliser cette décomposition commune n'est pas décrit dans [SR95] mais semble complexe. Les auteurs indiquent seulement une complexité en $O(n^4)$ si l'on n'ajoute pas de sommets aux polygones initiaux et en $O(n^2)$ si l'on se permet d'insérer $O(n^2)$ sommets dans les polygones initiaux.

  Un squelette arborescent (en pointillé sur la figure 1.5) est ensuite construit à partir du graphe d'adjacence des sous-parties étoilées, des points d'étoilement de ces sous-parties

1. La solution présentée ici est une heuristique dont la justification réside dans le fait que cela semble généralement bien fonctionner.

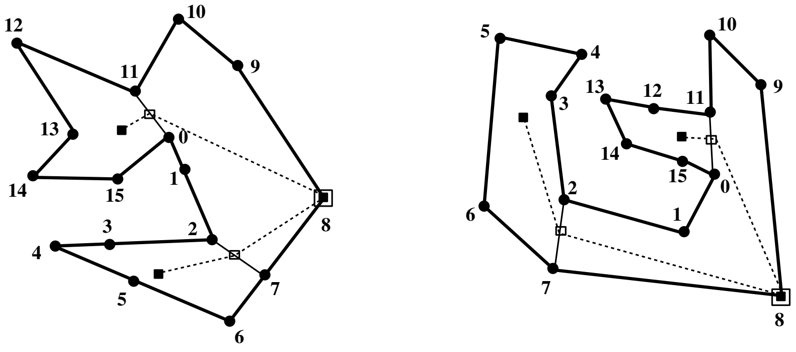

FIG. 1.5 – Deux décompositions compatibles de polygones. Les points • représentent les sommets des polygones, les points carrés et noirs représentent les centres d'étoilement des sous-parties et les points □ représentent les milieux des arêtes d'adjacences entre deux sous-parties. Le point 8 est la racine de l'arbre associé aux sous-parties (figure extraite de [SR95].)

et des points milieux des segments incidents à deux sous-parties. L'interpolation est réalisée en interpolant ce squelette puis en interpolant les sommets des sous-parties relativement à un système de coordonnées propre à chaque sous-partie.

L'interpolation des sommets incidents à deux sous-parties (les sommets 0, 11, 2 et 7 sur la figure 1.5) peut ne pas coïncider selon la sous-partie considérée. Les auteurs utilisent une heuristique (i.e. le barycentre) pour moyenner ces interpolations. En fait nous faisons face ici au très délicat problème des embranchements ou bifurcations qui ne possède pas de solution canonique valable pour toutes les configurations. Il s'agit sans doute du point le plus sensible de [SR95]. D'une manière générale il peut sembler commode d'effectuer des interpolations par morceaux, encore faut-il être capable de recoller les morceaux après interpolation !

- L'approche utilisée par E. Goldstein et C. Gotsman [GG95] pour résoudre l'interpolation rejoint celle d'A. Ekoule et al. [EPO91] pour la mise en correspondance : en effet, le principe est de déformer continûment chaque polygone en une forme commune et simple (un cercle). Les auteurs se servent ensuite des trajectoires de chaque sommet au cours de cette déformation pour calculer les positions des sommets à tout instant. Cette déformation peut être définie de manière "canonique" en faisant évoluer les contours (polygonaux) dans un champ de vecteurs qui est fonction de la courbure des contours (c.f. [KTZ92, ST94] et [CS93] pour une étude sur l'évolution des surfaces en fonction de la courbure).

  Dans [GG95] la correspondance est supposée indépendante de cette déformation. De ce fait la signification géométrique de l'interpolation n'est pas évidente. Les illustrations de [GG95] ne sont pas d'ailleurs très convaincantes...

- Citons pour mémoire des algorithmes très généraux comme la somme de Minkowski ou la méthode utilisée par B. Geiger pour connecter deux polygones simples [Gei93] (intuitivement on raccorde les deux polygones puis on gonfle l'un en rétractant l'autre). Du fait de leur généralité les interpolations fournies par ces algorithmes ne sont pas toujours intéressantes du point de vue des formes produites.

- Citons enfin un algorithme plus anecdotique pour métamorphoser des polygones dont les côtés se correspondent deux à deux et sont parallèles [GH94]. Le problème, issu de la géométrie algorithmique, est ici de transformer des polygones "parallèles" par des déformations "parallèles" (i.e. les polygones restent "parallèles" au cours de la transformation).

1.2.2 Métamorphoses de surfaces

La mise en correspondance des modèles polyédriques de surface est beaucoup plus ardue que pour des courbes polygonales. De ce fait, la plupart des méthodes proposées ne considèrent que ce problème, laissant de côté celui de l'interpolation.
Le principe commun à toutes les approches est de construire un sur-graphe contenant les graphes de chaque polyèdre (supposés homéomorphes à une sphère).

- E.W. Bethel et S.P. Uselton [BU89] transforment le problème de la mise en correspondance en un problème d'isomorphisme d'arbres (au sens de la théorie des graphes). Pour cela les auteurs considèrent le graphe dual de chaque polyèdre et le transforment en arbre par un parcours en largeur (c.f. [CLR94] §23.2) à partir d'une face spécifiée par l'utilisateur. Les arbres associés à chaque polyèdre sont alors mis en correspondance à partir de la racine, en ajoutant au fur et à mesure des sommets ou des faces dégénérées dans chaque graphe lorsqu'il n'y a pas correspondance.

- R.E. Parent [Par92] utilise un procédé dichotomique pour la mise en correspondance. Les polyèdres (de topologie sphérique) sont récursivement coupés en deux en parallèle afin d'associer les morceaux entre les deux polyèdres (c.f. figure 1.6). Le processus s'arête lorsque les morceaux sont réduits à des faces. Au cours de la subdivision, des sommets ou arêtes peuvent être introduits dans chacun des graphes. L'algorithme est conçu pour ajouter le moins possible de sommets et d'arêtes. La procédure de subdivision n'est cependant pas explicitée et il est difficile de se rendre compte de l'efficacité

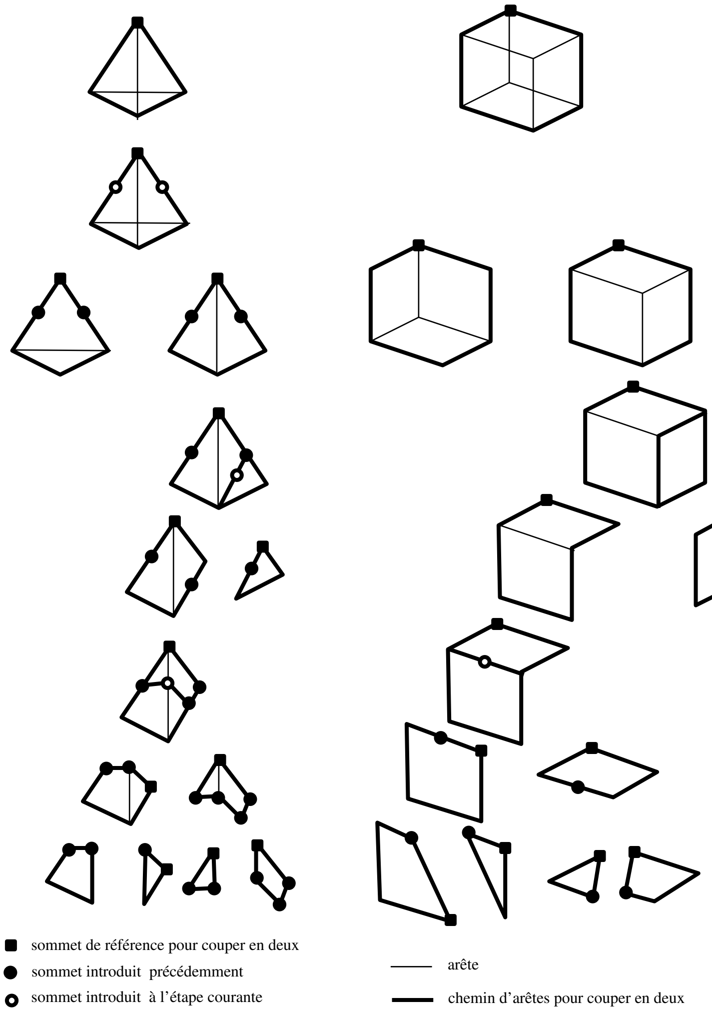

FIG. 1.6 – Subdivision récursive d'un tétraèdre et d'un cube. Seule la moitié de l'arbre de subdivision est montrée (figure extraite de [Par92]).

de la méthode.

Dans [BU89] comme dans [Par92], la mise en correspondance est indépendante du plongement des sommets et ne peut aboutir à des interpolations intéressantes sur le plan géométrique. En admettant qu'il soit judicieux de séparer la mise en correspondance de l'interpolation, il faut au moins définir des fonctions d'association qui soient "continues" par rapport au plongement des polyèdres, au sens où l'on s'intéresse autant à la proximité des sommets dans $\mathbb{R}^3$ qu'à leurs relations d'adjacence.

- L'approche la plus convaincante est celle décrite par J.R. Kent, R.E. Parent et W.E. Carlson dans [KPC91]. La qualité des interpolations produites s'obtient au dépend de la généralité : dans [KPC91] les polyèdres sont en effet supposés étoilés par rapport à un point.

  Les auteurs construisent un sur-graphe en projetant radialement chaque polyèdre (à partir de son point d'étoilement) sur une sphère. La superposition des graphes projetés sur la sphère est calculée à l'aide d'un algorithme de découpe de polygones, du type Atherton et Weiler ([FDFH90], §19.1.4), en temps $O(n^2)$, les polyèdres ayant $O(n)$ arêtes. Cette réunion est ensuite reprojetée radialement sur chaque polyèdre (c.f figure 1.7). L'interpolation est linéaire et chaque sommet se déplace le long d'un rayon.

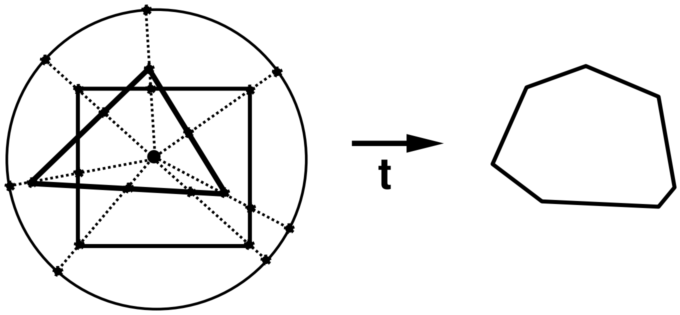

FIG. 1.7 – Principe (en deux dimensions) de l'interpolation entre un triangle et un carré.

  L'orientation relative des objets et le choix du centre d'étoilement (dans le noyau de chaque polyèdre) sont les seuls paramètres de la métamorphose.

  Dans [KCP92] on propose un catalogue d'extensions à des polyèdres non étoilés mais suffisamment particuliers pour être ramenés facilement à des sphères ou des convexes. Néanmoins le lien entre la géométrie des objets et l'interpolation, l'intérêt principal de [KPC91], est ici négligé. Par ailleurs l'algorithme de superposition des graphes est amélioré dans cet article.

1.2.3 Métamorphoses et évolutions de surfaces

Une approche très différente a été développée par X. Chen, P. Lienhardt et O. Terraz [CL92, Ter94, TL95] pour réaliser des métamorphoses. Dans ces travaux, le mot métamorphose doit cependant être compris dans le sens d'évolution plutôt que dans celui de passage d'une forme à une autre.

Cette approche repose essentiellement sur la structure topologique des objets qui s'identifient à des complexes cellulaires modélisés par des n-G-cartes [Lie93]. Les n-G-cartes représentent les relations d'adjacence des diverses cellules de l'objet (sommets, arêtes, faces...) au seul moyen de permutations sur un ensemble de "sommets" appelés *brins*. Les orbites des brins par ces permutations et leurs diverses composées permettent de retrouver les notions de sommet, arête, face, bord d'une surface, etc...

L'avantage de ce mode de représentation est de pouvoir spécifier des modifications (i.e. des évolutions) topologiques locales de façon simple et robuste. Les 2-G-cartes, qui modélisent des subdivisions de surface de dimension 2, sont plongées dans $\mathbb{R}^3$ par l'intermédiaire de leurs faces qui induisent les plongements des arêtes et sommets.

Le principe même des évolutions réside dans la *spécification* des règles de modification ou de croissance en fonction d'un temps (discret) d'horloge. Les règles de modification de plongement peuvent alors être liées au modèle de croissance.

1.3 Conclusion

La diversité des méthodes rencontrées et les fortes contraintes imposées aux objets dans chaque cas (transformation d'images similaires, de contours simples possédant le même nombre de sommets, de surfaces topologiquement équivalentes et étoilées...) montrent que la réalisation de métamorphose est un problème extrêmement complexe et loin d'être résolu dans tous les cas.

Si certaines méthodes sont a priori plus générales que d'autres, c'est au prix, soit d'un manque de contrôle sur la transformation ([KR91, Hug92]), soit d'une spécification totalement explicite demandée à l'utilisateur ([CL92, TL95]).

De fait, les méthodes qui produisent les meilleurs compromis entre le contrôle et l'automatisation sont celles qui se restreignent à des objets bien particuliers comme dans [BN92] ou [KPC91]. Dans ce cas il est possible de définir des transformations appropriées qui tiennent compte des hypothèses faites sur les objets à métamorphoser.

La démarche que nous avons suivie se rapproche beaucoup de celle proposée dans [KPC91] puisque nos métamorphoses s'appliquent à deux objets semblables (et simples) aussi bien sur le plan topologique que sur le plan géométrique. En effet, nos objets sont supposés être de topologie cylindrique (nous permettons cependant de fermer ce cylindre par des calottes, mais l'essentiel de la méthode réside dans le traitement de la partie cylindrique), et être *étoilés par rapport à un axe* (c.f. l'introduction de la partie II). La principale différence avec [KPC91] est donc d'avoir remplacé la condition d'étoilement par rapport à un point par celle d'étoilement par rapport à une courbe.

De plus, nous ne construisons pas de sur-graphe incluant les graphes des polyèdres d'origine. Mais nous échantillonnons les polyèdres à l'aide d'une paramétrisation induite par leurs axes.

L'utilisation d'un échantillonnage a plusieurs avantages :

- l'algorithme peut aisément être adapté à d'autres modèles de surfaces, telles que les surfaces implicites,
- la complexité de l'algorithme ne dépend essentiellement que de la phase d'échantillonnage,
- et il est possible de réaliser des métamorphoses entre un nombre quelconque d'objets sans augmenter la complexité, puisque la correspondance est implicitement déduite de l'échantillonnage.

Chapitre 2

Un algorithme de métamorphose

2.1 Schéma principal

Nous considérons deux objets surfaciques à métamorphoser. Nous supposons que chacun de ces objets est muni d'un axe[1] relativement auquel il est étoilé.
Chaque axe permet de décomposer l'objet associé en trois morceaux :

- deux calottes hémisphériques correspondant aux extrémités de l'axe,
- une partie cylindrique autour de l'axe.

Remarque 2.1 *La décomposition en trois parties est surtout utile pour ne pas avoir à définir un axe dont les extrémités adhèrent à la surface de l'objet. En fait, comme nous le verrons par la suite, les calottes et les parties cylindriques ont seulement, au cours de la métamorphose, un raccord continu même si ce raccord est $\mathcal{C}^\infty$ sur les objets clefs. En d'autres termes nous n'avons pas de raccord G^1-continu*[2].

Dans la pratique, l'angle entre les plans tangents, de chaque côté des raccords, est faible, et le lissage induit par les algorithmes de "rendu" donne une impression de raccord G^1. La possibilité d'avoir des calottes peut donc se justifier pour des applications à l'image de synthèse.

Les calottes et la partie cylindrique sont naturellement paramétrées par des systèmes de coordonnées sphériques ou cylindriques. En échantillonnant régulièrement l'espace des paramètres, nous construisons deux nouveaux graphes sur chaque objet, où chaque sommet

1. Notons que le mot axe est pour nous un synonyme d'arc compact, ce que nous avons encore appelé "courbe" dans la première partie de ce manuscrit. Par la suite nous utiliserons indifféremment ces vocables, et la notion de modèle de courbe (ou d'axe) se réfère à celle du chapitre 2 de la première partie.

2. On dit que deux morceaux de surfaces admettent un raccord G^1-continu le long d'un bord commun si leurs plans tangents sont confondus le long de ce bord.

correspond à un paramètre échantillonné (c.f. figure 2.1). La mise en correspondance de ces

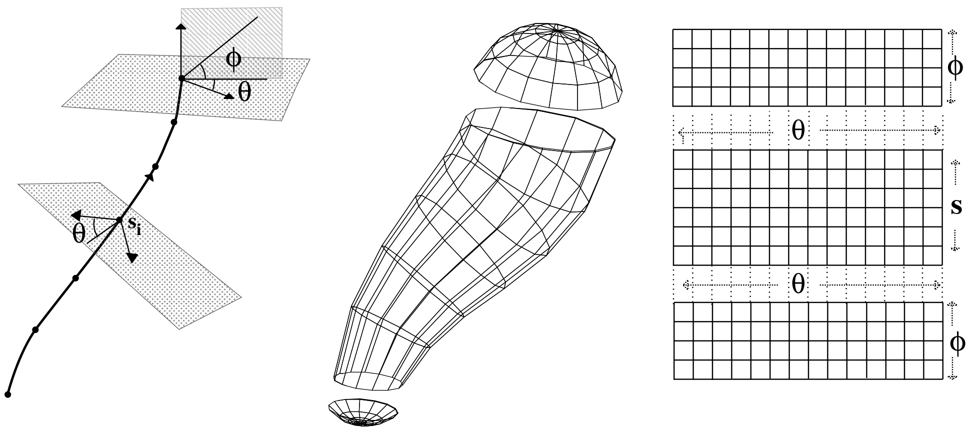

FIG. 2.1 – Un axe permet de décomposer un objet en trois parties.

nouveaux maillages est alors simplement obtenue en associant les sommets de mêmes paramètres.
L'interpolation des parties hémisphériques s'effectue ensuite radialement par rapport aux extrémités des axes, tandis que l'interpolation de la partie cylindrique est définie par des rayons orthogonaux aux axes.

Par ailleurs lorsque les objets comportent des éléments saillants tels que des arêtes vives, il est important de faire apparaître ces éléments dans les nouveaux maillages. Pour cela nous définissons une étape de recalage où nous déformons localement les maillages échantillonnés, de manière à les adapter sur les éléments saillants.

La description de l'algorithme s'organise de la manière suivante :

- dans la section 2.2 nous examinons comment définir un système de coordonnées cylindriques à partir d'une courbe,
- dans la section 2.3 nous détaillons la phase de paramétrisation et d'échantillonnage,
- puis dans la section 2.4 nous montrons comment recaler les maillages ainsi obtenus sur les éléments saillants des objets,
- et nous explicitons la mise en correspondance et l'interpolation des objets dans la section 2.5,
- nous concluons finalement par des exemples de métamorphoses.

Cet algorithme de métamorphose a par ailleurs fait l'objet d'une publication [LV94].

2.2 Système de coordonnées cylindriques

Nous examinons ci-dessous comment réaliser un système de coordonnées dans un voisinage de $\mathbb{R}^3$ à partir d'une courbe.

Étant donné une courbe γ plongée dans $\mathbb{R}^3$, il est possible de définir, sur un voisinage "tubulaire" V_γ de cette courbe, un découpage en tranche de V_γ. Ces tranches sont constituées de morceaux de plans normaux à la courbe γ. Ce découpage constitue une fibration de V_γ de base γ et dont la projection π_γ est la projection orthogonale sur la courbe (c.f. figure 2.2). En munissant chaque fibre d'un repère, et en choisissant une paramétrisation de la courbe,

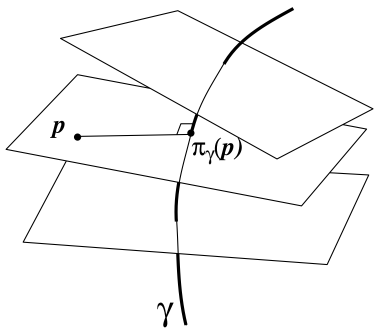

FIG. 2.2 – Le point p est projeté orthogonalement sur γ.

on peut définir un système de coordonnées :

$$\begin{array}{ccc} V_\gamma & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ p & \mapsto & (s,x,y) \end{array}$$

où s est le paramètre du point d'attache $\pi_\gamma(p)$ de p sur γ et (x,y) les coordonnées de p dans le repère associé à sa fibre.

Notons que le choix d'un repère dans chaque fibre revient au choix d'un repère mobile pour γ.

Dans [LCJ93, LCJ94] nous avions défini un outil de déformation pour l'image de synthèse fondé sur des systèmes de coordonnées associés à deux courbes γ_0 et γ_1. L'idée est ici de "fixer" un objet par rapport à la courbe γ_0 et de lui faire subir la déformation induite par γ_1. Un point p_0 est ainsi déformé en un point p_1 de sorte que les coordonnées de p_1 relativement à γ_1 soient identiques à celles de p_0 relativement à γ_0, i.e. $(s_1,x_1,y_1) = (s_0,x_0,y_0)$.

Afin de déformer correctement un objet avec cette technique, il faut donc s'assurer que celui-ci est contenu dans un voisinage convenable de γ_0 puisque nous devons calculer les coordonnées de ses points relativement à γ_0. En fait, la forme de ce voisinage dépend conjointement de la courbe et de l'objet comme on peut le voir sur la figure 2.3 : il n'est pas possible, à l'aide d'une information uniquement locale, de dire en quel point de l'axe un point de l'objet doit être attaché.

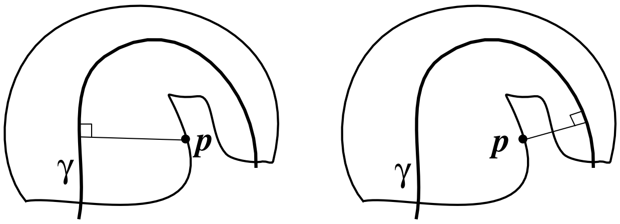

FIG. 2.3 – Le point p peut être projeté comme sur les deux figures, mais seul l'attachement de la figure de gauche peut aboutir à un attachement global de l'objet.

Dans [LCJ93] nous avions simplement attaché chaque point de l'objet au point le plus proche de l'axe, utilisant cette propriété d'extrémalité pour justifier le terme de projection orthogonale. Ce procédé ne permet donc pas de lever l'ambiguïté de la figure 2.3 et peut générer des incohérences lors de déformations axiales (c.f. figure 2.4).

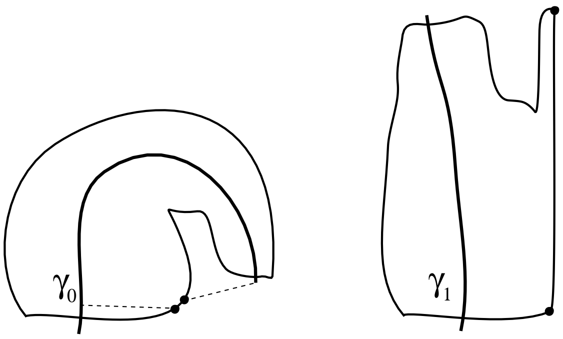

FIG. 2.4 – La fonction d'attachement est discontinue au niveau des points noirs. Une déformation de l'axe produit un objet discontinu.

Nous avons donc amélioré cette phase d'attachement de l'objet à l'axe. Nous avons de plus tenu compte du fait que l'axe est un modèle de courbe échantillonnée et non une courbe différentiable (voir le chapitre 2 de la première partie).

2.2.1 Système de coordonnées associé à un modèle de courbe

À partir d'une courbe modèle $\Gamma = (\Gamma_i, \mathbf{t}_i)$ munie d'un repère mobile (R_i) nous construisons une partition de l'espace entourant Γ à l'aide des plans de coupe Π_i définis par les points Γ_i et les vecteurs $\mathbf{t}_i$. La région comprise entre deux plans Π_i et Π_{i+1} forme un dièdre D_i dans lequel nous définissons un système de coordonnées. Afin de pouvoir définir correctement ces dièdres nous supposerons désormais que les modèles de courbes vérifient les relations :

$$\langle \Gamma_i\Gamma_{i+1}, \mathbf{t}_i \rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle \Gamma_i\Gamma_{i+1}, \mathbf{t}_{i+1} \rangle < 0$$

Un point p est alors contenu dans un dièdre D_i s'il vérifie :

$$\langle \Gamma_i p, \mathbf{t}_i \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle \Gamma_{i+1} p, \mathbf{t}_{i+1} \rangle < 0 \tag{2.1}$$

Le système de coordonnées à l'intérieur de D_i est défini à partir des points Γ_i et Γ_{i+1} et des repères R_i et R_{i+1} de la manière suivante :
pour chaque point p du dièdre D_i nous recherchons le plan Π_p, du faisceau engendré par Π_i et Π_{i+1}, qui contient p (c.f. figure 2.5). Ce plan admet une équation de la forme :

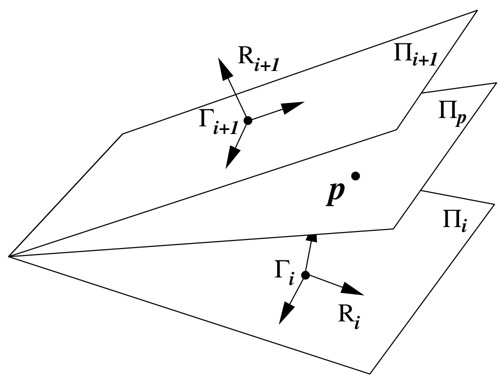

FIG. 2.5 – Le dièdre D_i.

$$(1 - \lambda_p)\,\langle \Gamma_i q, \mathbf{t}_i \rangle \; + \; \lambda_p\,\langle \Gamma_{i+1} q, \mathbf{t}_{i+1} \rangle = 0$$

où λ_p est obtenu en remplaçant q par le point p. La condition 2.1 assure que λ_p appartient à l'intervalle $[0, 1[$.

Puis nous munissons Π_p d'un repère de la manière suivante : le point Γ_i et le repère R_i sont appliqués sur Π_{i+1} par rotation autour de la droite $\Pi_i \cap \Pi_{i+1}$. Le point Γ_i' et le repère R_i' ainsi obtenus se déduisent respectivement de Γ_{i+1} et R_{i+1} à l'aide d'une translation et d'une rotation dans le plan Π_{i+1} (c.f. figure 2.6). Cette translation et l'angle de la rotation

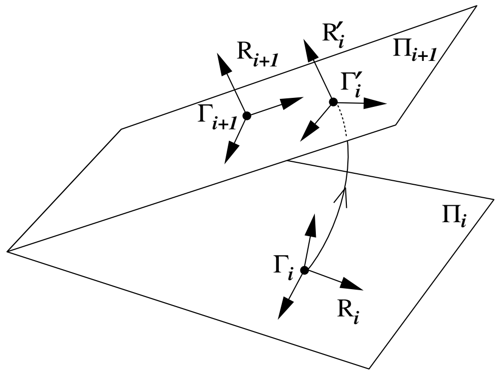

FIG. 2.6 – Report du système de coordonnées du plan Π_i dans le plan Π_{i+1}.

sont interpolés linéairement à l'aide du paramètre λ_p, le point et la rotation correspondante sont alors à nouveau transportés dans le plan Π_p par rotation autour de $\Pi_i \cap \Pi_{i+1}$.

Notons que lorsque le repère de Γ est le RTRP l'angle de rotation entre R'_i et R_{i+1} est toujours nul (c.f. section 2.2.2 de la première partie).

Définition 2.1 *La somme $i + \lambda_p$ et les composantes de p dans le repère de Π_p ainsi définies constituent les coordonnées de p relativement au dièdre D_i de la courbe Γ.*

2.2.2 Attachement d'un objet à un modèle de courbe

Comme dans le cas continu, il n'est pas possible de dire à quel dièdre un point doit être attaché sans tenir compte de la forme de l'objet auquel il appartient (c.f. figure 2.7). En fait, pour dire si un point de l'objet est bien attaché à l'axe nous devons définir ce qu'est un objet bien attaché.

Définition 2.2 *Un objet immergé dans $\mathbb{R}^3$ est attaché correctement par rapport à un modèle de courbe Γ si ses points peuvent être associés à des dièdres de Γ de sorte que leurs coordonnées dans ces dièdres, définies ci-dessus, varient continûment sur l'objet.*

Nous avons permis à l'objet d'être simplement immergé afin de pouvoir l'attacher s'il s'auto-intersecte. Ceci n'était pas possible en utilisant le procédé de [LCJ93]. De sorte qu'après déformation d'un objet avec un axe il n'était pas toujours possible de ré-attacher correctement l'objet déformé à l'axe déformé.

Savoir si un objet peut ou non être correctement attaché à une courbe peut être délicat, d'autant que cet attachement n'est pas nécessairement unique comme le montre la figure 2.8. Par contre, si nous savons attacher un point de l'objet à la courbe alors le reste de l'objet

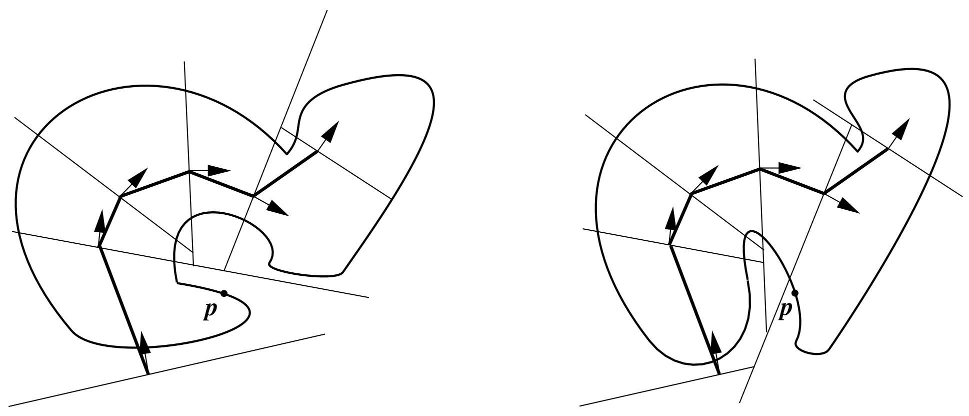

FIG. 2.7 – Le point p doit être attaché différemment selon l'objet auquel il appartient.

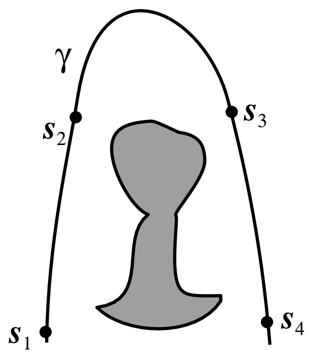

FIG. 2.8 – L'objet gris peut être attaché aussi bien sur la portion d'axe comprise entre s_1 et s_2 qu'entre celle comprise entre s_3 et s_4.

peut être attaché par continuité. Nous utilisons ainsi l'algorithme suivant pour attacher les sommets d'un polyèdre :

Algorithme d'attachement Les données de l'algorithme sont constituées d'un polyèdre P, d'un modèle de courbe Γ et d'un sommet de P correctement attaché à Γ.
Par un parcours en largeur (c.f. [CLR94] §23.2) de P on attache progressivement les sommets. Pour cela on utilise le fait que si un sommet p est attaché au dièdre D_i, alors un sommet adjacent q est attaché comme suit :

- si $\langle \Gamma_i q, \mathbf{t}_i \rangle \geq 0$ alors q est attaché à D_j avec

$$j = \inf \{k \geq i \,|\, \langle \Gamma_k q, \mathbf{t}_k \rangle \geq 0 \;\; \text{et} \;\; \langle \Gamma_{k+1} q, \mathbf{t}_{k+1} \rangle < 0\}$$

- sinon q est attaché à D_j avec

$$j = \sup \{k < i \,|\, \langle \Gamma_k q, \mathbf{t}_k \rangle \geq 0 \;\; \text{et} \;\; \langle \Gamma_{k+1} q, \mathbf{t}_{k+1} \rangle < 0\}$$

Un argument de continuité permet en effet de voir que la coordonnée $i+\lambda$ est nécessairement monotone le long d'une arête.
Il est facile de voir que la complexité de l'algorithme d'attachement est proportionnelle à la somme du nombre d'arêtes et sommets de P et du nombre d'intersection des arêtes de P avec les morceaux de plans de coupe Π_i inclus dans le voisinage tubulaire concerné. Dans le pire des cas ce nombre est égal au produit du nombre d'arêtes de P par le nombre de sommets de Γ.

Remarque 2.2 *L'algorithme d'attachement requiert la donnée d'un sommet p de P correctement attaché à Γ. Dans notre cas, il n'existe qu'un seul attachement possible car l'axe est interne à l'objet. La sélection de ce sommet est obtenue en choisissant une demi-droite orthogonale à l'axe Γ en un point Γ_i, puis en choisissant p dans la face la plus proche de Γ_i qui intersecte cette demi-droite. Ce sommet peut ensuite être attaché facilement à Γ sans erreur (c.f. figure 2.9).*

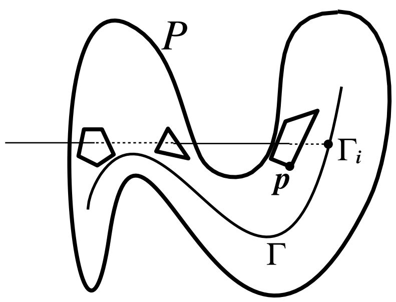

FIG. 2.9 – Le sommet p est attaché en progressant le long de Γ à partir du point Γ_i.

2.2.3 Extensions aux extrémités d'une courbe

Dans la mesure où les objets ne sont pas entièrement attachés à l'axe, mais où des parties sont également attachées aux extrémités, ce que nous appelons les calottes (c.f. figure 2.10), il est indispensable de s'assurer que le système de coordonnées le long de l'axe se prolonge convenablement dans les demi-espaces "au dessus" des extrémités. Nous allons voir que ce prolongement n'est possible que si la courbure de l'axe et la torsion du repère adapté sont nulles aux extrémités. Nous raisonnons sur l'extrémité $\gamma(1)$ pour ne pas avoir à inverser les

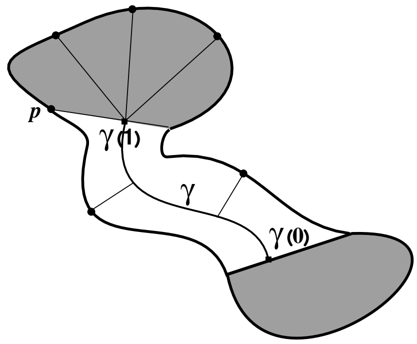

FIG. 2.10 – Les parties grisées de l'objet en trait épais sont attachées aux extrémités de l'axe γ.

repères entre l'axe et la calotte.

Comme nous l'avons vu au début de cette section, le système de coordonnées associé à l'axe est le suivant :

$$p \overset{\Phi}{\mapsto} (s, x, y)$$

où s est le paramètre du point d'attache $\pi_\gamma(p)$ de p sur γ et (x, y) les coordonnées de p dans le repère associé à $\gamma(s)$. Plus précisément, si $R(s) = (\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_2(s))$ est le repère mobile, le long de γ, les coordonnées de p sont :

$$(\Phi_1(p), \Phi_2(p), \Phi_3(p)) = (s, \langle \gamma(s)p, \mathbf{e}_2(s)\rangle, \langle \gamma(s)p, \mathbf{e}_3(s)\rangle)$$

où s est une fonction de p déterminée implicitement par l'équation :

$$f(p, s) = \langle \gamma(s)p, \mathbf{e}_1(s)\rangle = 0$$

En effet, comme l'expression[3] $\frac{\partial f}{\partial s} = -v(1 - \kappa\langle \gamma p, \mathbf{n}\rangle)$ n'est pas nulle, d'après l'hypothèse de bon attachement de l'objet, nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites, et nous avons en particulier :

$$d\Phi_1(p).\mathbf{h} = ds(p).\mathbf{h} = -\frac{\partial_p f}{\partial_s f}.\mathbf{h} = \frac{\langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_1\rangle}{v(1 - \kappa\langle \gamma p, \mathbf{n}\rangle)}$$

On en déduit :

$$d\Phi_2(p).\mathbf{h} = \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_2\rangle + \langle \gamma p, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s}\rangle ds(p).\mathbf{h}$$

et de même :

$$d\Phi_3(p).\mathbf{h} = \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_3\rangle + \langle \gamma p, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}s}\rangle ds(p).\mathbf{h}$$

Par conséquent, pour prolonger le système de coordonnées cylindriques en une application linéaire au delà de l'extrémité $\gamma(1)$, il faut que la courbure κ soit nulle et que les produits

3. où $v = \|\gamma'\|$, et $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}s} = v\kappa\mathbf{n}$.

$\langle \gamma p, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s} \rangle$ et $\langle \gamma p, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}s} \rangle$ soient nuls pour tout p attaché à une extrémité. Cette dernière condition est vérifiée si et seulement si le vecteur vitesse de rotation instantanée est normal à $\mathbf{e}_1$. On vérifie assez simplement (c.f partie I, section 2.3.1) que cela équivaut à dire que l'angle entre le repère R et l'un quelconque des RTRP de γ a une dérivée nulle au niveau de l'extrémité.

Dans ces conditions nous avons pour tout point p du plan extrême associé à $\gamma(1)$:

$$d\Phi(p).\mathbf{h} = (\frac{1}{v}\langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_1 \rangle, \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_3 \rangle)$$

Cette dernière expression est indépendante de p et peut donc être prolongée par une application linéaire dans la partie au dessus de $\gamma(1)$.

Nous avons ainsi réalisé un système de coordonnées de classe $\mathcal{C}^1$. Avec ce système de coordonnées, nous pouvons donc redresser une surface régulière et obtenir une surface redressée également régulière (i.e. ayant partout un plan tangent).

Lorsque $v = 1$ aux extrémités, le redressement des calottes est une simple rotation, sinon il faut en plus effectuer une affinité de rapport $\frac{1}{v}$ perpendiculairement aux plans normaux aux extrémités.

2.3 Paramétrage et échantillonnage

Nous décrivons le processus d'échantillonnage d'un objet à partir d'un axe. En premier lieu, une paramétrisation de l'objet est définie, puis un échantillonnage de sa surface est construit. La surface est supposée être dans un voisinage convenable de la courbe (i.e. où l'on peut définir le système de coordonnées précédent).

2.3.1 Paramétrage à partir d'un axe

Pour paramétrer un objet surfacique relativement à un axe, il ne suffit pas de pouvoir l'attacher comme précédemment. En fait nous considérons qu'un objet peut être paramétré par un axe γ muni d'un repère mobile $R = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ si (ayant confondu γ et sa paramétrisation) :

1. la calotte attachée à l'extrémité inférieure $\gamma(0)$ admet une paramétrisation de la forme :

$$(\theta, \phi) \mapsto \gamma(0) \ + \ r_0(\theta, \phi)\mathbf{v}_0(\theta, \phi) \ , \qquad (\theta, \phi) \in \ [0, 2\pi[\times[0, \frac{\pi}{2}]$$

2. la partie centrale admet une paramétrisation de la forme :

$$(s, \theta) \mapsto \gamma(s) \ + \ r_1(s, \theta)\, \mathbf{u}(s, \theta) \ , \qquad (s, \theta) \in]0, 1[\times[0, 2\pi[$$

3. la calotte attachée à l'extrémité supérieure $\gamma(1)$ admet une paramétrisation de la forme :

$$(\theta,\phi) \mapsto \gamma(1) + r_2(\theta,\phi)\mathbf{v}_1(\theta,\phi) \ , \qquad (\theta,\phi) \in [0,2\pi[\times[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

où r_0, r_1 et r_2 sont des fonctions strictement positives, et

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_0(\theta,\phi) & = & \cos\phi\,(\cos\theta\,\mathbf{e}_2(0) + \sin\theta\,\mathbf{e}_3(0)) - \sin\phi\,\mathbf{e}_1(0) \\ \mathbf{u}(s,\theta) & = & \cos\theta\,\mathbf{e}_2(s) + \sin\theta\,\mathbf{e}_3(s) \\ \mathbf{v}_1(\theta,\phi) & = & \cos\phi(\cos\theta\,\mathbf{e}_2(1) + \sin\theta\,\mathbf{e}_3(1)) + \sin\phi\,\mathbf{e}_1(1) \end{array}$$

La forme des paramétrisations montre que la partie centrale doit être ce qu'on appelle couramment un *cylindre généralisé* [Pon88] relativement à γ, tandis que les calottes doivent être étoilées par rapport aux extrémités respectives $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$.

Inversement, si on se donne un axe à l'intérieur d'un objet, tel que :

1. sa surface peut être découpée en deux calottes et une partie centrale relatives à l'axe,

2. pour chaque point des calottes, le segment qui le lie à l'extrémité correspondante ne rencontre pas l'objet,

3. pour chaque point de la partie centrale, le segment qui le lie à sa projection sur l'axe ne rencontre pas l'objet,

alors, l'objet peut être paramétré par l'axe de la manière précédente. Par ailleurs, si l'objet est une surface régulière et que les droites support des segments considérés ci-dessus l'intersectent transversalement [4] aux points considérés, alors la paramétrisation est régulière sur chacun des trois morceaux de la surface.

Dans la pratique nous employons des axes qui sont des modèles de courbes. Nous pouvons cependant conserver ces définitions et propriétés de paramétrage dans le cadre d'un modèle de courbe. Dans ce cas, seule la définition des points $\gamma(s)$ et des repères $(\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_1(s))$ doit être adaptée en fonction de la définition du système de coordonnées associé à un modèle de courbe (c.f. section précédente).

Le choix de cette paramétrisation est en fait uniquement lié à son caractère géométrique, au sens où le point de paramètre (s,θ) (resp. (θ,ϕ)) est obtenu en intersectant l'objet avec la demi-droite d'extrémité $\gamma(s)$ et de direction $\mathbf{u}(s,\theta)$ (resp. d'extrémité $\gamma(0)$ ou $\gamma(1)$ et

4. i.e. le plan tangent à la surface ne contient pas la droite support au point considéré.

de direction $\mathbf{v}_0(\theta, \phi)$ ou $\mathbf{v}_1(\theta, \phi)$). Par la suite nous appellerons ces demi-droites des **demi-droites d'échantillonnage**.

Nous insistons, par ailleurs, sur le fait que le procédé de métamorphose que nous proposons n'est pas essentiellement lié à cette paramétrisation mais à la propriété de fibration de l'objet *au dessus* d'une courbe immergée dans $\mathbb{R}^3$.

2.3.2 Échantillonnage à partir d'un axe

Pour échantillonner un objet surfacique paramétré par un axe Γ, nous "projetons" une grille rectangulaire de l'espace des paramètres sur chacun des trois morceaux de surface. Les sommets de cette grille correspondent à un échantillonnage uniforme des paramètres s, θ et ϕ. Les nombres d'échantillons de chacun de ces paramètres sont spécifiés par l'utilisateur. Ils déterminent la finesse de l'échantillonnage. Si le nombre d'échantillons des paramètres s, θ et ϕ sont respectivement n, p et q, alors le nombre total d'échantillons sur l'objet est :

$$n_{tot} = p(n + 2q - 2).$$

Comme nous venons de le voir, un point de paramètre (s_i, θ_j) (resp. (θ_i, ϕ_j)) est obtenu par intersection de l'objet avec la demi-droite d'échantillonnage correspondante.

Jusqu'à présent nous n'avons pas explicité le modèle de représentation des objets surfaciques car il n'intervenait pas dans le paramétrage décrit. Par contre lors du calcul d'une intersection avec une demi-droite d'échantillonnage, nous tenons compte de ce modèle.

• Si l'objet est défini par des fonctions implicites, il suffit de calculer cette intersection, par un procédé de dichotomie, pour chaque couple de paramètres échantillons (s_i, θ_j) (resp. (θ_i, ϕ_j)).

• Si l'objet est défini par un maillage polyédrique, comme dans notre implémentation, cette intersection s'obtient en testant l'intersection de la demi-droite d'échantillonnage avec toutes les faces du polyèdre.

Afin d'éviter ces calculs, nous inversons le procédé en cherchant, pour chaque face de P, les échantillons contenus dans cette face. Pour cela, chaque face est "projetée" dans l'espace des paramètres(c.f. figure 2.11). Ceci nécessite en premier lieu de calculer les coordonnées des sommets de P relativement à l'axe, en utilisant l'algorithme d'attachement décrit plus haut. Puis, en tenant compte des coordonnées des sommets d'une face, nous pouvons retrouver facilement les échantillons intérieurs à cette face.

Nous détaillons ci-dessous la détermination des échantillons intérieurs à une face, selon que cette face est dans la partie cylindrique ou dans l'une des calottes.

Échantillonnage d'une face de la partie cylindrique Les échantillons contenus dans une face F de la partie cylindrique sont calculés par un balayage de la face par les plans

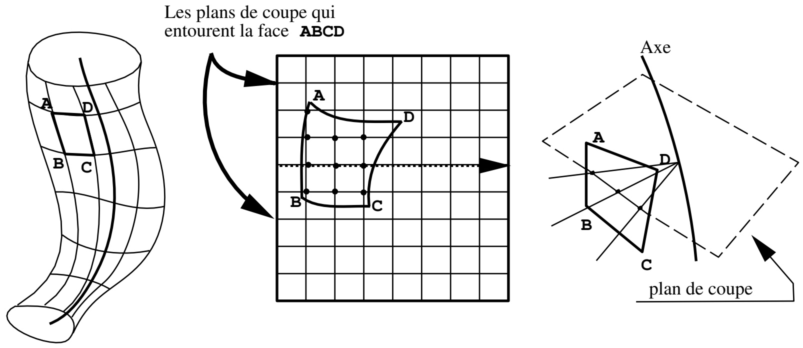

FIG. 2.11 – La face $F = ABCD$ est projetée dans l'espace des paramètres. Les échantillons intérieurs sont calculés par balayage à l'aide des plans de coupe.

de coupe Π_i. Seuls sont pris en compte les plans dont l'indice est compris entre les indices des dièdres associés à chaque sommet de F (c.f. figure 2.11). Pour chaque plan de coupe Π_i, on calcule le segment intersection $F \cap \Pi_i$ (les faces sont supposées planes et convexes). Les angles polaires θ_a et θ_b des extrémités a et b de ce segment sont calculés dans le repère (Γ_i, R_i). On intersecte alors la face F avec les demi-droites d'échantillonnage de paramètre (s_i, θ_j), où s_i correspond au plan Π_i et les échantillons θ_j sont compris entre les deux angles θ_a et θ_b (c.f. figure 2.12).

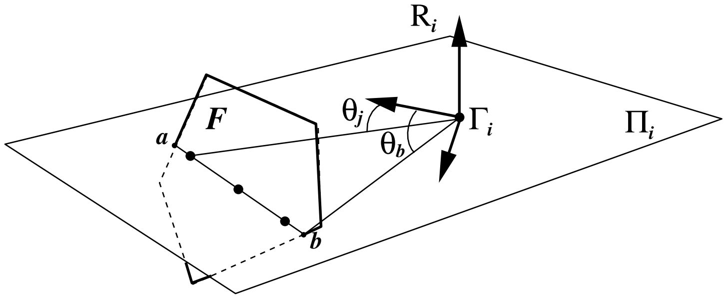

FIG. 2.12 – On détermine les échantillons dans l'intersection ab de la face F avec le plan de coupe Π_i.

Les échantillons calculés sont rangés au fur et à mesure dans un tableau rectangulaire représentant la grille d'échantillonnage de la partie cylindrique.

Échantillonnage d'une face d'une calotte La détermination des échantillons contenus dans une face F d'une calotte est en tout point similaire au cas précédent. Les plans de coupes Π_i, servant au balayage, sont ici remplacés par les quarts de plan, correspondant aux angles θ_i, du faisceau engendré par la droite $(\Gamma_0, \mathbf{t}_0)$ (resp. $(\Gamma_n, \mathbf{t}_n)$) (c.f. figure 2.13).

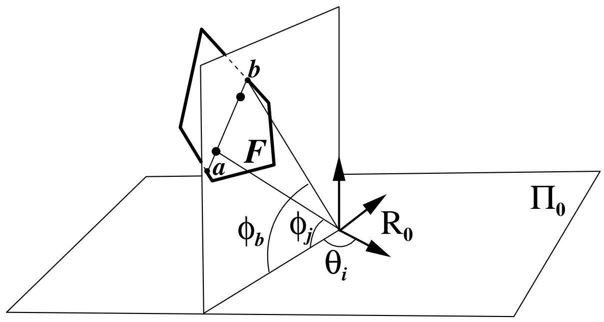

FIG. 2.13 – On détermine les échantillons dans l'intersection ab de la face F avec le quart de plan de coupe associé à l'angle θ_i.

En résumé, l'échantillonnage d'un objet polyédrique s'effectue en deux étapes :

1. l'attachement du polyèdre sur l'axe,
2. un parcours des faces du polyèdre pour trouver les échantillons qu'elles contiennent.

Remarque 2.3 *Pour permettre à l'utilisateur d'employer des objets "ouverts" au niveau des calottes, nous avons adapté la procédure d'échantillonnage. Dans le cas d'objets ouverts, les échantillons obtenus ne remplissent pas entièrement les trois grilles de paramètres (c.f. figure 2.14). Or ce remplissage est nécessaire pour la mise en correspondance. De plus le bord de*

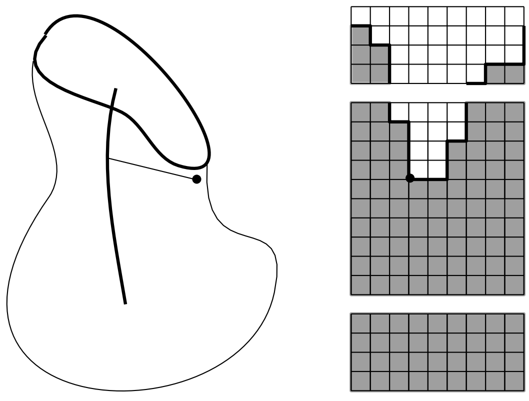

FIG. 2.14 – Un objet ouvert au niveau de la calotte supérieure. Les échantillons trouvés dans les cartes correspondent à la partie grise des cartes.

l'objet risque d'apparaître en dents de scie en raison de la répartition des échantillons. Pour *y remédier, nous déplaçons "verticalement" les échantillons du bord des cartes sur le bord de l'objet. Puis, nous finissons de remplir les tableaux des échantillons en dupliquant les valeurs du bord dans chaque colonne.*

Nous pouvons ainsi échantillonner des objets homéomorphes à des sphères, des disques ou des cylindres. En fait le graphe correspondant aux objets échantillonnés est toujours cylindrique et nous ne réalisons pas d'opération topologique au cours des métamorphoses. Par contre les échantillons du bord supérieur du graphe d'une calotte fermée sont toujours géométriquement identifiés (c.f. figure 2.15) (un cylindre n'est jamais qu'une sphère privée de deux points).

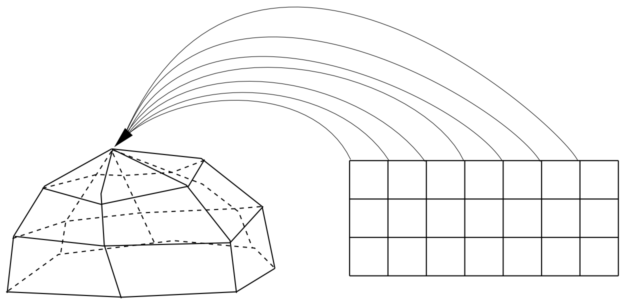

FIG. 2.15 – Les échantillons de paramètres $\phi_i = \frac{\pi}{2}$ sont identifiés.

Remarque 2.4 *Pour assurer le remplissage des grilles de paramètres, il est primordial de regarder les problèmes numériques qui sont inhérents aux algorithmes géométriques de ce type. Nous détaillons ci-dessous comment prendre en compte ces problèmes.*

Les deux opérations déterminantes pour l'échantillonnage sont :

1. intersecter une face avec un plan de coupe,
2. trouver le secteur angulaire, contenant les échantillons, associé à cette intersection.

Pour ne pas avoir de "trou" dans les grilles de paramètres, il faut être sûr que les secteurs angulaires associés à toutes les faces qui intersectent un plan de coupe Π_i recouvrent l'intervalle $[0, 2\pi[$. Nous utilisons pour cela une procédure qui effectue les calculs avec une précision ϵ et qui rend un secteur angulaire pour toute face qui intersecte le plan de coupe Π_i "à ϵ près".

La procédure d'intersection d'une face avec un plan Π_i teste l'intersection de chaque arête de la face avec ce plan. Ce calcul est effectué avec la précision ϵ, de sorte qu'une arête qui intersecte effectivement Π_i soit détectée. Une arête ab est ainsi sélectionnée si elle vérifie :

$$I(ab, \Pi_i) < \epsilon$$

où I est une procédure qui calcule à ϵ près.

Lorsqu'une arête ab est sélectionnée, nous lui associons un angle qui correspond au paramètre θ_c de son intersection avec Π_i (c.f. figure 2.16). La précision de ce calcul n'est pas très

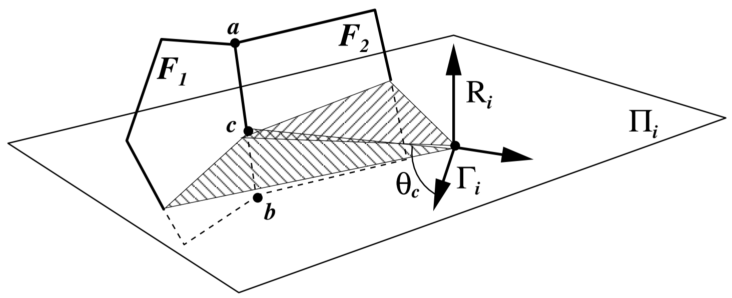

FIG. 2.16 – Les secteurs angulaires associés aux faces F_1 et F_2 sont figurés par des zones hachurées.

importante. Par contre, lors du traitement des faces F_1 et F_2 incidentes à l'arête ab, nous devons effectuer la *même* séquence de calculs sur l'arête ab (c.f. figure 2.16).
Le secteur angulaire associé à une face F est alors le plus grand secteur angulaire bordé par les angles θ_c associés à ces arêtes.

Il suffit ensuite d'intersecter le plan support de F avec les demi-droites d'échantillonnage incluses dans le secteur angulaire trouvé. De cette manière, tous les échantillons sont calculés au moins une fois. Certains échantillons peuvent être calculés plusieurs fois avec des faces différentes. Ces faces étant a priori proches l'une de l'autre, voire incidentes, les intersections des plans supports correspondants avec la demi-droite d'échantillonnage sont également proches (en supposant que les faces sont bien transversales aux demi-droites d'échantillonnage !).

2.4 Recalage

Si nous appliquons l'algorithme d'échantillonnage à un cube muni d'un axe droit comme sur la figure 2.17, l'objet résultant a un aspect très différent du cube d'origine : les côtés du cube n'apparaissent pas dans le modèle échantillonné.

Les éléments saillants d'un objet, ses arêtes vives et les points coniques, sont en effet de première importance dans l'apparence visuelle car ils démarquent des discontinuités dans l'intensité réfléchie.

Dans la méthode de J.R. Kent et al. [KPC91], ces éléments saillants apparaissent dans le sur-maillage reconstruit puisque ce sur-maillage contient exactement les maillages de chaque polyèdre à métamorphoser (voir l'état de l'art du chapitre 1). Par contre l'utilisation d'un

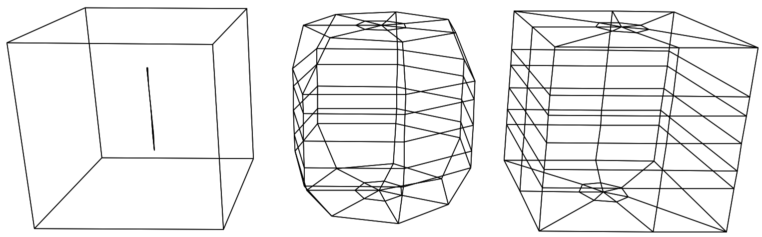

FIG. 2.17 – À gauche : un cube et son axe. Au milieu : le cube échantillonné avec la procédure précédente. À droite : le maillage recalé.

échantillonnage ne fait pas apparaître ces éléments dans le maillage rectangulaire reconstruit. Nous avons donc défini une étape de recalage du maillage échantillonné sur les éléments saillants des objets.

La procédure de recalage est constituée de deux étapes :

1. la sélection des éléments saillants,

2. la modification du maillage pour faire apparaître chaque élément saillant.

Sélection des éléments saillants

Dans notre implémentation, un critère angulaire entre les normales des deux faces incidentes à une arête permet de sélectionner les arêtes vives. Ce critère est simplement la comparaison de l'angle entre les normales avec un angle fixé par l'utilisateur (c.f. figure 2.18).

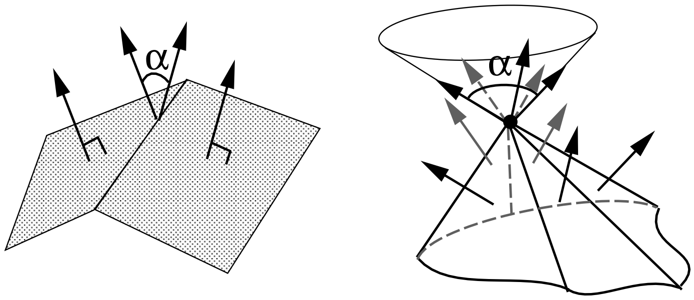

FIG. 2.18 – À gauche : l'angle α entre les normales des deux faces incidentes à une arête permet de déterminer si cette arête est vive. À droite : l'angle α maximal entre les normales des faces incidente à un sommet permet de le sélectionner comme sommet conique.

De même la sélection automatique des sommets coniques est effectuée à l'aide du "cône" des normales des faces incidentes à ce sommet.

Comme cette sélection automatique n'est généralement pas suffisante, nous permettons à l'utilisateur de sélectionner ou dé-sélectionner à l'écran des arêtes et des sommets du polyèdre. Ces éléments saillants sont rangés dans une liste ordonnée par l'ordre de sélection.

Recalage sur les éléments saillants

Nous cherchons à modifier le moins possible la topologie des maillages échantillonnés (trois grilles rectangulaires), afin de simplifier par la suite l'étape de mise en correspondance. Nous nous imposons donc de ne modifier le maillage que par les déplacements d'échantillons et par des ajouts de diagonales dans les mailles rectangulaires.

Le recalage est effectué de sorte qu'à la fin de cette étape :

- chaque arête vive est décomposée en une union disjointe d'arêtes du nouveau maillage,
- chaque point conique est un sommet du nouveau maillage.

Les déplacements des sommets échantillons sont locaux et bornés relativement à la paramétrisation. Plus précisément, nous découpons l'espace des paramètres en zones de déformation associées à chaque échantillon : la zone associée à l'échantillon (s_i, θ_j) est tout simplement le rectangle (c.f. figure 2.19) :

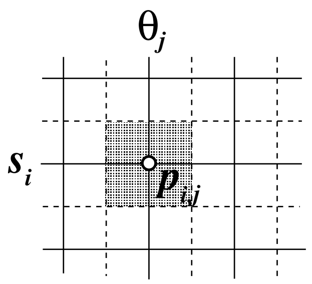

FIG. 2.19 – La zone de déplacement associée à un échantillon $p_{i,j}$ dans l'espace des paramètres.

$$[s_i - \frac{\Delta s}{2}\, , \, s_i + \frac{\Delta s}{2}[\times [\theta_j - \frac{\Delta \theta}{2}\, , \, \theta_j + \frac{\Delta \theta}{2}[$$

où Δs et $\Delta\theta$ sont les pas d'échantillonnage respectifs des paramètres s et θ.

Pour chaque élément saillant, nous localisons dans l'espace des paramètres les échantillons à déplacer que nous "projetons" sur l'élément saillant :

- pour chaque arête saillante $\mathcal{A}$ nous effectuons un balayage similaire à celui utilisé dans l'étape d'échantillonnage. Dans la partie cylindrique, par exemple, $\mathcal{A}$ est découpée par tous les plans de coupes *intermédiaires* (de paramètre $s_i + \frac{\Delta s}{2}$) et les paramètres θ_{a_i} des points d'intersection a_i sont utilisés pour déterminer les échantillons $p_{i,j}$ à déplacer.
  - Pour un échantillon $p_{i,j}$ de la partie cylindrique, nous calculons le point $q_{i,j}$ de $\mathcal{A}$ le plus proche de la demi-droite d'échantillonnage correspondante. Si les paramètres de $q_{i,j}$ sont dans la zone de déformation associée à $p_{i,j}$, alors $p_{i,j}$ est déplacé sur ce point. Sinon, $p_{i,j}$ est déplacé sur le point déterminé par l'intersection de $\mathcal{A}$ avec les frontières de la zone de déformation associée à $p_{i,j}$.
  - Dans le cas des calottes, nous utilisons une projection sphérique. Nous déterminons le point $q_{i,j}$ de $\mathcal{A}$, tel que sa projection sur la sphère unité, centrée à l'extrémité de l'axe, soit la plus proche de la projection de $p_{i,j}$ (c.f. figure 2.20). Si les paramètres de $q_{i,j}$ sont dans la zone de déformation associée à $p_{i,j}$, alors

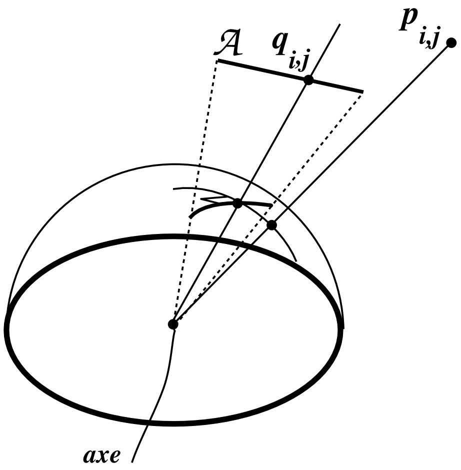

FIG. 2.20 – Le point $q_{i,j}$ est l'intersection de la droite support de $\mathcal{A}$ et de la droite déterminée par les deux plans orthogonaux passant par l'extrémité de l'axe et contenant respectivement l'arête $\mathcal{A}$ et le point $p_{i,j}$.

  $p_{i,j}$ est déplacé sur ce point. Sinon, $p_{i,j}$ est déplacé sur le point déterminé par l'intersection de $\mathcal{A}$ avec les frontières de la zone de déformation associée à $p_{i,j}$.

Après avoir déplacé les sommets échantillons sur l'arête vive $\mathcal{A}$, il se peut que le maillage déformé ne recouvre pas entièrement $\mathcal{A}$. C'est le cas dès que la séquence de sommets $p_{i,j}$ sélectionnée ne forme pas un chemin connexe dans les grilles d'échantillonnages. Dans ce cas, une diagonale doit être ajoutée pour chaque "trou" rencontré dans la séquence de sommets $p_{i,j}$. Par exemple sur la figure 2.21, quatre diagonales ont été ajoutées, une pour chaque saut entre coupes, i.e., entre A et B, B et C, C et D et entre D et E.

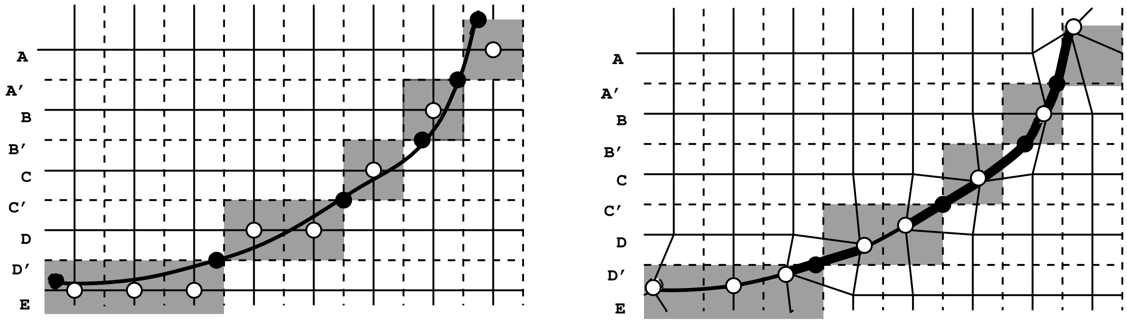

FIG. 2.21 – La courbe noire représente la projection d'une arête dans l'espace des paramètres. Les points blancs sont les échantillons à déplacer et leur zone de déplacement est représentée par des rectangles gris. Les droites horizontales en pointillés indiquent les plans de coupe intermédiaires, tandis que les points noirs sont les intersections de ces plans avec l'arête considérée (et les extrémités de l'arête). Sur la figure de droite on montre le maillage déformé et les diagonales ajoutées sont indiquées en trait épais.

- pour chaque point conique et chaque point extrémité d'arête vive, nous localisons ces paramètres dans une zone de déformation et déplaçons l'échantillon $p_{i,j}$ correspondant sur ce point.

Lorsque la finesse de l'échantillonnage n'est pas suffisante, plusieurs éléments saillants peuvent déformer successivement les mêmes sommets échantillons. Par conséquent, seul le recalage des derniers éléments saillants apparaîtra dans le maillage final s'il y a conflit. L'ordre de la liste des éléments saillants est donc de première importance et peut être modifié dans l'étape de sélection comme nous l'avons remarqué plus haut.
Notons qu'après l'étape de recalage, un sommet du maillage a au plus huit voisins (c.f figure 2.22). Nous ne pouvons donc pas recaler un maillage, aussi fin soit-il, sur un sommet conique incident à plus de huit arêtes vives. De tels sommets peuvent être détectés et nous pouvons modifier localement le maillage en conséquence.

En conclusion de l'état de l'art nous avons énuméré les avantages d'un échantillonnage par rapport à la construction d'un sur-maillage, à savoir l'adaptabilité à divers modes de représentation de surface, ou encore la possibilité d'interpoler une suite d'objets sans augmenter la complexité du maillage. En contrepartie, nous devons traiter séparément les éléments saillants. Remarquons tout de même qu'il est également possible de construire un

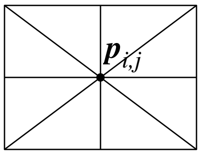

FIG. 2.22 – Un sommet $p_{i,j}$ du maillage recalé peut avoir huit voisins si des diagonales ont été ajoutées dans chacune des mailles incidentes.

sur-maillage dans un esprit semblable à la méthode de J.R. Kent et al. [KPC91, KCP92]. Pour cela, il faut être capable de dire si deux arêtes s'intersectent dans l'espace des paramètres et savoir projeter cette intersection sur chaque arête. Dans [KPC91], ce calcul est très simple et se réduit au calcul de l'intersection de deux plans contenant chacun une arête et le centre d'étoilement des objets. Dans notre cas, le calcul est moins simple mais peut être effectué par un balayage semblable à celui que nous avons utilisé pour le recalage : nous intersectons les rectangles de paramètres définis par les deux extrémités de chaque arête et nous réduisons progressivement l'intervalle de coupe associé si cette intersection est non vide.

2.5 Mise en correspondance et interpolation

2.5.1 Mise en correspondance

Après recalage des deux objets à métamorphoser sur leurs éléments saillants, leurs maillages échantillonnés n'ont plus nécessairement la même topologie. En effet, certaines mailles, initialement rectangulaires, ont pu être coupées en deux par une diagonale.

Dans le tableau $p_{i,j}$ qui représente le maillage d'un objet, nous avons réservé un champ qui indique si une diagonale a été introduite dans la maille rectangulaire $(p_{i,j}, p_{i+1,j}, p_{i+1,j+1}, p_{i,j+1})$. Il y a deux types de diagonales. La diagonale de type M relie $p_{i,j}$ et $p_{i+1,j+1}$, tandis que celle de type D relie $p_{i+1,j}$ et $p_{i,j+1}$.

Pour construire un nouveau sur-maillage qui contienne les diagonales introduites dans les deux objets, il suffit de parcourir les tableaux $p^0_{i,j}$ et $p^1_{i,j}$ associés à chaque objet :

- si les deux échantillons $p^0_{i,j}$ et $p^1_{i,j}$ pointent respectivement sur des diagonales de type M et D, nous coupons la maille (i, j) du nouveau maillage en quatre triangles (c.f. figure 2.23),

- si un seul type de diagonale apparaît, nous coupons en deux la maille (i, j) du nouveau maillage avec la même diagonale.

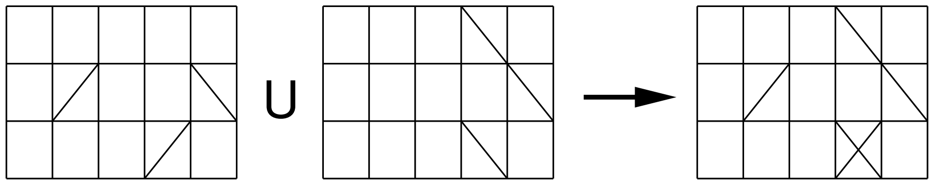

FIG. 2.23 – Le surmaillage est obtenu par superposition des grilles de chaque objet recalé.

À ce niveau, il est possible de trianguler le reste des mailles qui ne contiennent pas de diagonale pour assurer la planarité des faces de l'approximation polyédrique.

2.5.2 Interpolation

Lors de l'étape d'échantillonnage, les coordonnées des échantillons sont calculées dans le repère local associé à la coupe considérée. Par exemple, si l'échantillon $p_{i,j}$ de la partie cylindrique a pour coordonnées locales $(x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$, ses coordonnées dans le repère du "monde" sont :

$$\Gamma_i + R_i \begin{pmatrix} x_{i,j} \\ y_{i,j} \\ z_{i,j} \end{pmatrix}$$

Lorsque l'échantillon $p_{i,j}$ n'est pas déplacé par l'étape de recalage, nous avons d'ailleurs :

$$x_{i,j} = 0 \qquad y_{i,j} = r_{i,j} \cos\theta_j \qquad z_{i,j} = r_{i,j} \sin\theta_j$$

La métamorphose de deux objets s'obtient en interpolant simultanément les systèmes de coordonnées (Γ_i, R_i), i.e. les axes munis de leur repère, et les coordonnées locales des points.

- Les axes et leurs repères sont interpolés à l'aide du procédé décrit dans la première partie de ce manuscrit.
- Les coordonnées locales sont interpolées à l'aide d'une fonction monotone $\alpha_i(t)$ définie le long de l'axe :

$$\begin{pmatrix} x^t_{i,j} \\ y^t_{i,j} \\ z^t_{i,j} \end{pmatrix} = (1 - \alpha_i(t)) \begin{pmatrix} x^0_{i,j} \\ y^0_{i,j} \\ z^0_{i,j} \end{pmatrix} + \alpha_i(t) \begin{pmatrix} x^1_{i,j} \\ y^1_{i,j} \\ z^1_{i,j} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Si les axes peuvent être munis du repère de Frenet, nous pouvons assurer une paramétrisation régulière dans la partie cylindrique en choisissant :

$$\alpha_i(t) = \frac{1}{(1 - \frac{v_{0,i}}{v_{1,i}}) + \frac{1}{t}\frac{v_{0,i}}{v_{1,i}}} = \frac{t}{t + (1-t)\frac{v_{0,i}}{v_{1,i}}}$$

En effet, dans ce cas, nous n'aurons pas d'auto-intersection locale car la courbure interpolée vérifie :

$$\kappa_{t,i} = (1 - \alpha_i(t))\kappa_{0,i} + \alpha_i(t)\kappa_{1,i}$$

comme nous l'avons vu dans la première partie de ce manuscrit.

Dans la pratique nous utilisons, pour $\alpha_i(t)$, le champ scalaire défini sur les axes (c.f. partie II, §2.3.2 : Contrôle de la vitesse de transformation). Sur les images extraites du film METADATA [PLVB94] (c.f. figure **??**) nous voyons par exemple un cube se transformer en tête de manière non uniforme le long d'un axe rectiligne interne à l'objet.

Raccord entre les calottes et la partie cylindrique

Nous allons voir qu'il n'est généralement pas possible d'obtenir, au cours de l'interpolation, un raccord G^1-continu entre les calottes et la partie cylindrique, même si les objets clefs sont lisses. Pour cela, nous pouvons supposer que les objets sont attachés à un même axe vertical en utilisant le redressement par le système de coordonnées étudié dans la section 2.2. Comme ce redressement laisse invariant chaque plan de coupe, on peut toujours affirmer que l'interpolation est radiale par rapport à l'axe.

Chaque objet admet une paramétrisation du type :

$$(s, \theta) \mapsto s\mathbf{e}_1 \,+\, r(s, \theta)\mathbf{e}_\theta$$

dans la partie cylindrique (c.f. figure 2.24 pour les notations) et une paramétrisation du type :

$$(\theta, \phi) \mapsto \mathbf{e}_1 \,+\, \rho(\theta, \phi)\mathbf{e}_{\theta,\phi}$$

dans la calotte supérieure (nous raisonnons sur le raccord avec la calotte supérieure). L'hypothèse de transversalité des objets par rapport aux demi-droites d'échantillonnage permet d'affirmer que les fonctions r et ρ sont différentiables. On vérifie assez simplement que la condition de continuité de la normale au niveau du raccord ($s = 1$ et $\phi = 0$) s'exprime par l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \phi} = r\,\frac{\partial r}{\partial s} \tag{2.3}$$

L'interpolation définie par l'équation 2.2 nous fournit deux fonctions r_t et ρ_t :

$$r_t = (1 - \alpha(t))\, r_0 \,+\, \alpha(t)\, r_1$$
$$\rho_t = (1 - \alpha(t))\, \rho_0 \,+\, \alpha(t)\, \rho_1$$

où (r_0, ρ_0) et (r_1, ρ_1) sont les rayons associés aux objets clefs. L'équation de raccord 2.3 à l'instant t devient, en tenant compte du fait qu'elle est vérifiée aux instants 0 et 1 :

$$\frac{1}{2}\,\alpha(t)\,(1 - \alpha(t))\,\frac{\partial}{\partial s}(r_0 - r_1)^2 = 0$$

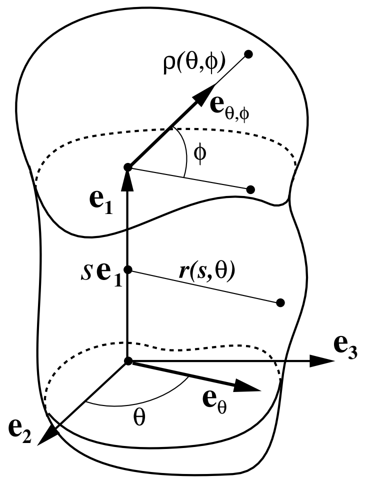

FIG. 2.24 – Paramétrisation de la partie cylindrique et des calottes.

Ceci montre que les objets interpolés admettent un raccord G^1 si et seulement si pour tout couple de points en correspondance sur les bords des objets, les droites verticales tangentes en ces points sont parallèles (c.f. figure 2.25). Notons que ce problème est identique à celui

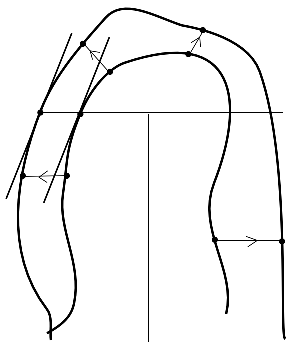

FIG. 2.25 – La figure représente une coupe des objets par un plan vertical passant par l'axe. Les points en correspondance sur le bord doivent avoir des tangentes parallèles pour obtenir une interpolation régulière.

rencontré dans le plan pour interpoler des courbes partiellement exprimées en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.

Dans la pratique, le défaut de "lissité" est faible lorsque l'angle entre les droites précédentes n'est pas trop important comme on peut s'en convaincre sur les figures 2.26 et 2.27.

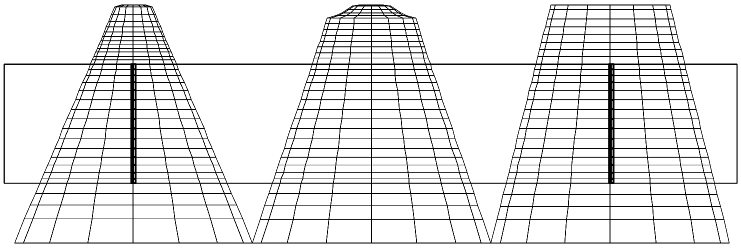

FIG. 2.26 – Transformation entre deux cônes tronqués. Les axes sont identiques et visualisés en traits épais. Les objets sont représentés aux instants 0, 1/2 et 1. Le grand rectangle indique le niveau de raccord entre la partie cylindrique et les calottes.

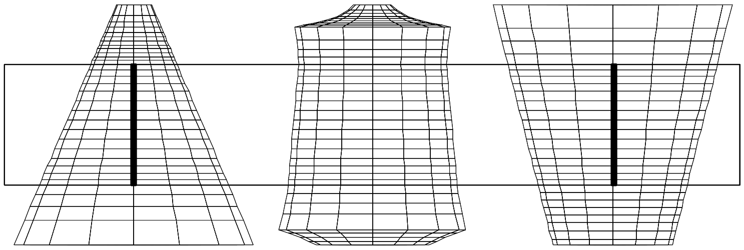

FIG. 2.27 – Transformation entre deux cônes tronqués. Les angles entre les plans tangents aux deux cônes sont plus importants que sur la figure 2.26.

2.6 Exemples de métamorphoses

Nous présentons ici quelques exemples de métamorphoses. L'ensemble de nos implémentations s'insère dans le modeleur ACTION3D, un système de modélisation et d'animation développé conjointement par l'INRIA et la société SOGITEC. Les métamorphoses que nous présentons ont toutes été réalisées en temps interactif sur des machines SGI INDIGO 2.

- Les figures 2.28, 2.29 et 2.30 illustrent le rôle de l'axe dans le contrôle des déformations. Deux axes ont étés utilisés : un segment vertical et une courbe oblique. Le niveau de discrétisation est volontairement faible pour mieux visualiser les maillages : les axes comportent 7 sommets, les angles θ et ϕ sont respectivement discrétisés avec 16 et 5 échantillons. Sur les figures en fils de fer 2.28 et 2.29, les axes sont représentés en trait épais pour les formes clefs (initiales et finales).

  Sur la figure 2.28, le même axe, un segment vertical, est utilisé pour échantillonner les formes clefs. Dans la transformation du bas de la figure 2.28, l'axe a été translaté à l'intérieur du cube. Ce mode de contrôle est comparable au contrôle des transformations de J.R. Kent et al. [KPC91] par translation du centre d'étoilement à l'intérieur des objets.

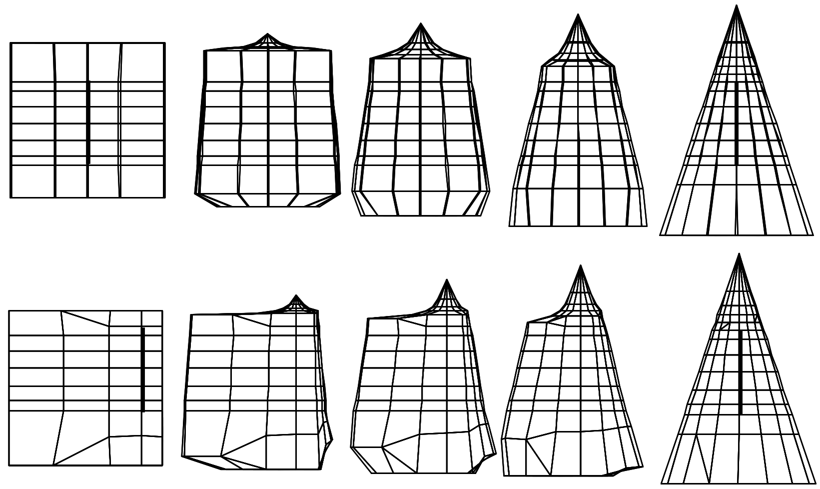

Fig. 2.28 – Le même axe est utilisé pour échantillonner les deux objets clefs.

Lorsque les axes associés aux formes clefs sont distincts, comme sur la figure 2.29, l'interpolation de l'axe influe notablement sur la transformation. Dans la figure 2.29, nous avons échangé l'axe initial et final entre les transformations du haut et du bas de l'image. Notons que le faible taux d'échantillonnage permet tout de même d'obtenir des images intéressantes (c.f. figure 2.30).

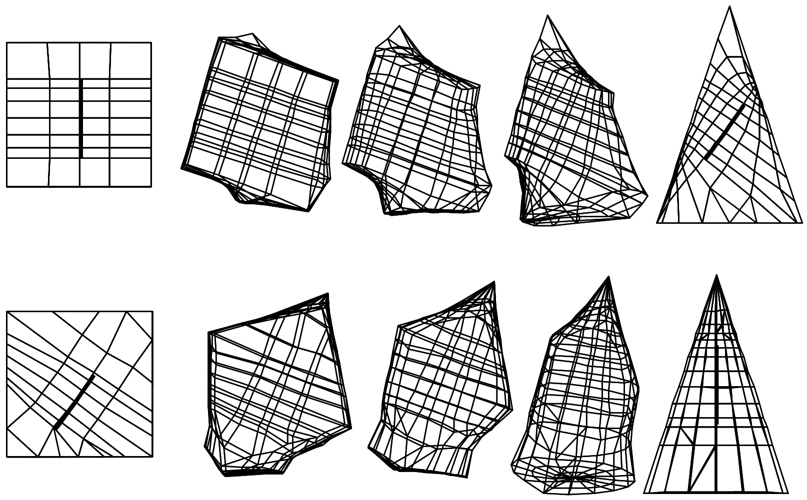

Fig. 2.29 – L'axe initial et l'axe final sont échangés entre la transformation de la rangée du haut et celle de la rangée du bas.

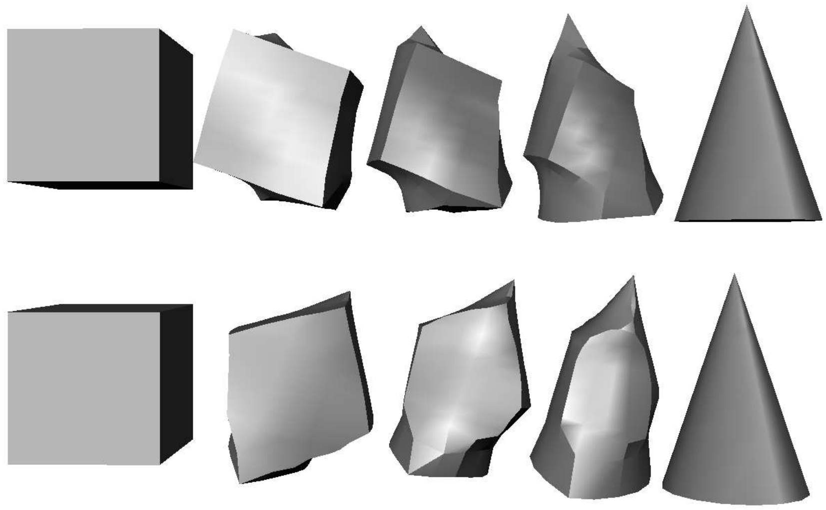

FIG. 2.30 – Un rendu simple de la figure 2.29.

- Sur la figure 2.31, nous montrons trois transformations, en colonne, entre un cube, un poisson et un tube courbé. Nous pouvons noter que les objets interpolés ne s'auto-intersectent pas. Les axes sous-jacents sont rectilignes pour le cube et le poisson.

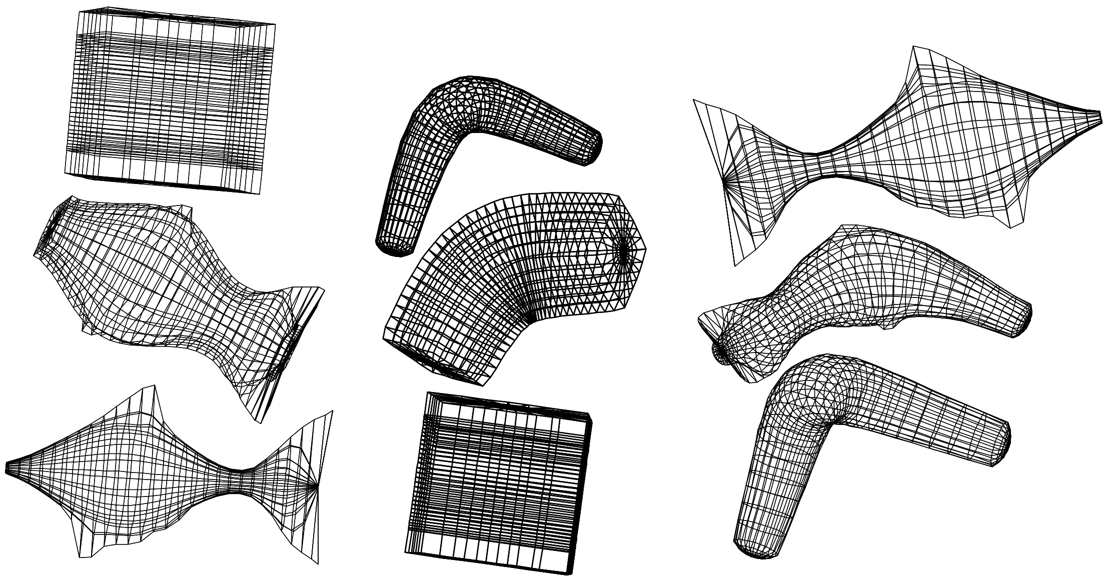

FIG. 2.31 – Les formes de la rangée du milieu sont interpolées entre les formes du haut et du bas.

- Les figures 2.32 et 2.33 illustrent la possibilité d'avoir des objets ouverts. Nous pouvons de plus noter la position oblique de l'axe par rapport au bord de la demi-sphère utilisée.

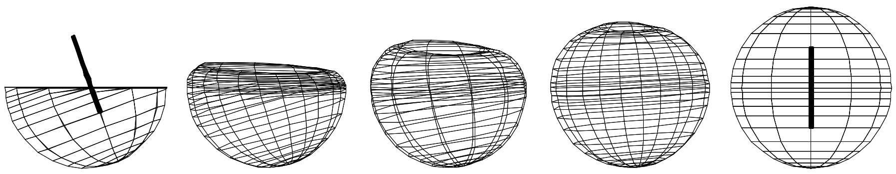

FIG. 2.32 – Transformation d'une calotte sphérique en sphère.

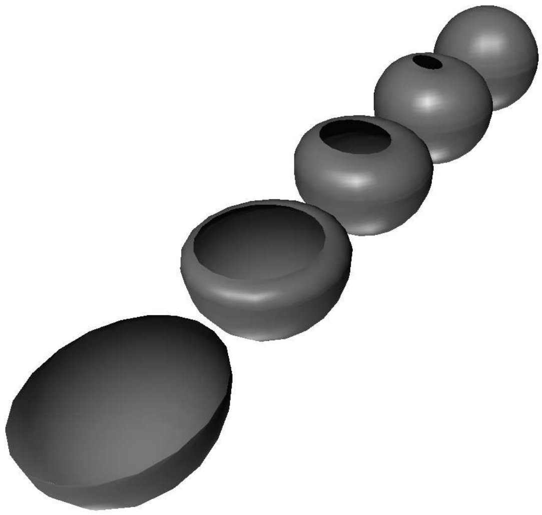

FIG. 2.33 – Un rendu de la figure 2.32.

- La figure 2.34 montre la transformation d'une faucille en poisson. Sur ces images la transformation apparaît clairement lisse.

- Nous terminons sur des exemples plus compliqués tirés du film METADATA [PLVB94]. Le maillage échantillonné associé à chaque objet comporte 7200 facettes : l'axe est approximé par 50 points, tandis que chaque section est constituée de 80 échantillons. Les parties hémisphériques sont composées de 1600 facettes (80 $\times$ 20). Le cygne apparaissant dans ces images est échantillonné avec un axe qui suit sa courbure naturelle. Les autres formes sont échantillonnées avec des axes approximativement rectilignes. Les quatre transformations illustrent des effets visuels particuliers tels que :

  – l'importance des éléments saillants dans la transformation avec le piano,

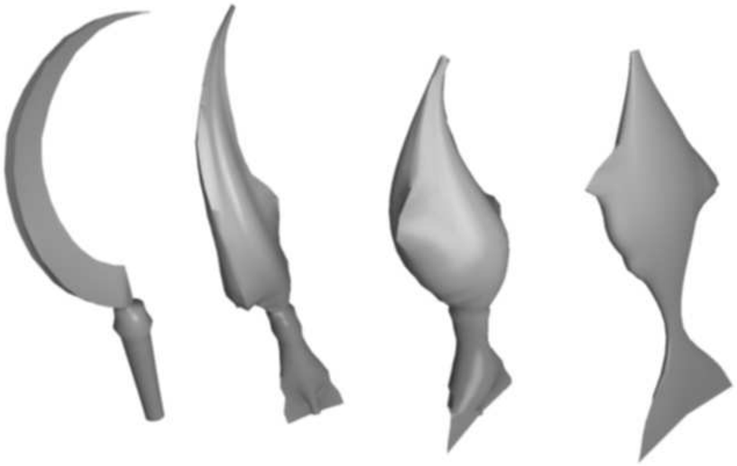

FIG. 2.34 – Transformation d'une faucille en poisson.

- l'interpolation des axes dans la transformation avec le cygne,
- l'intérêt du positionnement des axes dans la transformation des têtes : les nez et les yeux des deux têtes se correspondent,
- l'introduction d'un contrôle de la vitesse de transformation le long de l'axe : ici le cube est graduellement transformé en tête, en partant du haut vers le bas. Ce contrôle est comparable à celui utilisé dans les transformations d'images pixels par S-Y Lee et al. [LCHS94].

FIG. 2.35 – *Deux métamorphoses extraites du film Metadata.*

FIG. 2.36 – *Deux métamorphoses extraites du film Metadata.*

2.7 Conclusion

Dans cette dernière partie, nous avons défini un procédé de métamorphose pour des objets de forme tubulaire. Ce procédé s'appuie sur quatre étapes distinctes :

1. l'attachement des objets clefs sur leur axe respectif,
2. l'échantillonnage de ces objets à partir de leur axe et de l'attachement de la première étape,
3. le recalage éventuel des maillages obtenus sur les éléments saillants des objets,
4. l'interpolation proprement dite des maillages ainsi construits.

Nous avons étudié avec précision chaque étape, en faisant ressortir les problèmes numériques ou conceptuels liés à chacune d'elles. En particulier, l'étude de l'attachement d'un polyèdre à une courbe polygonale fournit un algorithme d'attachement qui nous semble original et efficace.

Notre méthode offre l'avantage d'un contrôle important sur la transformation. L'utilisateur peut varier la forme et la position des axes internes aux objets, dans la mesure où la condition d'étoilement reste vérifiée. Ces variations lui offrent un certaine liberté d'expression comme le montrent les exemples de la section 2.6. Une fois les axes fixés dans chaque objet, il peut également jouer sur la transformation par l'intermédiaire de la paramétrisation des axe, modifiant ainsi les appariements entre coupes, puis en modifiant l'interpolation des axes comme nous l'avons montré dans la première partie de ce mémoire.

Cette technique de métamorphose a été employée par A. Paouri, une artiste infographiste, pour réaliser une séquence animée [PLVB94]. Les effets produits dans cette séquence n'auraient pas pu être obtenus avec les techniques de métamorphoses offertes jusqu'à présent.

Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle méthode pour réaliser une métamorphose entre deux objets surfaciques de forme tubulaire. Cette restriction à une forme tubulaire nous a permis de considérer les objets comme des immersions explicites du cylindre $S^1 \times D^1$. Nous avons ainsi ramené le problème de l'interpolation d'objets à la recherche d'une homotopie entre deux immersions du cylindre. Plus précisément, nous avons exprimé ces immersions sous forme de cylindres généralisés, réduisant à nouveau cette recherche essentiellement à celle d'une interpolation de courbes.

Dans un premier temps, nous avons proposé un procédé d'interpolation de courbes pour l'animation sous un angle original qui n'avait pas été envisagé dans notre discipline. Partant d'une étude précise et mathématique de l'interpolation nous avons défini un algorithme permettant de contrôler par des paramètres simples les caractéristiques géométriques de l'interpolation.

Par ailleurs, le fait que nos objets ne soient pas donnés au départ sous forme de cylindre généralisé fait l'objet des deuxième et troisième parties puisque nous devons justement construire une courbe squelette dans chaque forme et attacher celle-ci à cette courbe par l'intermédiaire d'un système de coordonnées approprié.

En particulier, la recherche d'une courbe squelette, ou axe, dans un objet polyédrique nous a mené à développer dans la deuxième partie une analogie combinatoire simple avec la théorie des fonctions de Morse, à travers la notion de coloriage d'un graphe à valeurs dans un ensemble ordonné. Nous avons ainsi proposé une formule d'Euler et une décomposition cylindrique des polyèdres. Nous avons alors étudié précisément le cas où le graphe est colorié par une distance géodésique discrète, et nous en avons déduit, par moyennage du découpage en bande associé, une définition d'axe originale et plus appropriée que celle d'axe médian.

Dans la troisième partie, nous avons présenté une technique de métamorphose qui repose sur l'interpolation de courbes étudiée dans la première partie. L'axe, relativement auquel l'objet doit être étoilé, peut être défini interactivement à partir de l'axe proposé dans la seconde partie. Les objets clefs sont échantillonnés par l'intermédiaire d'une paramétrisation liée à leur axe respectif. Nous détaillons ces étapes de paramétrisation et d'échantillonnage et proposons pour ce faire un algorithme d'attachement (i.e. de projection) d'un polyèdre sur une courbe polygonale.

En partant du principe que les discontinuités d'une forme sont essentielles dans son aspect, nous établissons finalement un étape de recalage d'une forme échantillonnée sur ces éléments saillants.

D'une façon générale, notre souci d'exprimer les problèmes de manière intrinsèque nous a permis d'obtenir des algorithmes simples et robustes aux paramètres clairement identifiés. Nous avons pu ainsi définir un outil interactif de métamorphose caractérisé par

– sa simplicité d'utilisation,

– la modularité de son contrôle par l'intermédiaire de l'axe et de son interpolation,

– l'aspect intuitif de ses paramètres.

Cet outil a de plus été validé par la réalisation d'une séquence animée [PLVB94].

Notons que malgré l'intérêt intrinsèque de l'axe proposé dans la deuxième partie, il faudrait encore réfléchir sur son adaptation à la paramétrisation d'une forme. Hormis une étape de recentrage de cet axe, nous pouvons imaginer de conserver pour fibres les cercles géodésiques qui ont servi à sa construction au lieu des sections planes et orthogonales à l'axe. Il faudrait alors être au moins capable d'interpoler deux fibres, c'est-à-dire deux courbes gauches compactes (i.e. fermées). Cette dernière condition rend malheureusement la tâche beaucoup plus ardue que celle traitée dans la première partie. Le seul cas de courbes planes fermées, a priori non étoilées, pose des difficultés comme le montrent les méthodes de métamorphose de contours décrites dans l'état de l'art de la troisième partie.

Par ailleurs nous avons montré dans la troisième partie que le raccord entre la partie cylindrique d'un objet et ses calottes n'étaient généralement pas G^1 au cours de l'interpolation. D'une manière générale les calottes et les embranchements (du type cactus) posent des problèmes qui entraînent le recours à des modèles spécifiques tels que ceux proposés par J. Séqueira, R. Ebel et F. Schmitt [SES93, Ebe92] ou par M.-P. Gascuel [Gas90]. En effet, cette caractérisation des formes par des calottes ou des embranchements est liée à l'utilisation d'une projection définie au moyen d'une fonction de Morse sur les objets. Les singularités de ces projections font que les fibres associées, i.e. les ensembles qui se projettent sur un même point, peuvent changer de topologies, de sorte qu'il devient difficile de mettre en relation les fibres de deux objets.

Ainsi la simplification apparente fournie par l'utilisation de projections peut-elle s'avérer source de difficultés dans le cadre d'une interpolation entre deux formes quelconques. Elle est néanmoins nécessaire si l'on veut donner un sens au mot forme, c'est à dire être capable de différencier les divers plongements d'une variété. Notre perception des formes est en effet intimement liée à l'utilisation de projections comme en témoigne notre système visuel. Plus exactement elle est liée à une famille de projections comme, par exemple, la famille des projections orthogonales d'une surface [Ker81]. Cette famille de projections caractérise les divers aspects d'une forme, et la théorie des singularités nous apprend que ces aspects (i.e. les paramètres de la famille de projections) se stratifient génériquement [5] en complexes cellulaires, dont les cellules définissent des aspects stables (i.e. constituent des classes d'isotopie). Nous pouvons dès lors esquisser un programme de recherche pour l'élaboration d'un outil de métamorphoses plus général :

1. Il faut avant tout choisir une famille de projections qui détermine la forme. On peut par exemple exiger que cette famille distingue un cactus à trois branches d'un cactus à cinq branches.

2. Puis nous devons étudier la structure des diverses décompositions cellulaires associées à cette famille de projections. Pour être exploitable, une famille de projections devra fournir des décompositions suffisamment simples pour être "traitables" dans les cas pratiques.

3. Par la suite nous devrons fixer une famille raisonnable de complexes cellulaires qui fournisse un ensemble de formes modèles assez vaste pour être utile à un animateur. Ces modèles devront être constructibles canoniquement ou à défaut être mémorisés une fois pour toute.

4. Il faudra de plus définir des déformations entre modèles, ce qui d'une certaine manière revient à déformer les graphes d'aspects associés.

5. Enfin, nous devrons exprimer comment passer entre deux formes qui ont les mêmes aspects afin de ramener un objet que l'on cherche effectivement à métamorphoser sur un modèle de même aspect.

Il nous semble que c'est à ce prix uniquement que nous pourrons définir un outil assez puissant pour traiter un ensemble de formes suffisamment générique.

5. i.e. pour un ouvert dense de l'espace des plongements muni d'une topologie adéquate.

Annexe A

Linéarisation d'un champ invariant

Proposition A.1 *Soit X un groupe de Lie admettant une représentation linéaire fidèle dans $GL(n,\mathbb{R})$, notée ρ et $\mathbf{V}$ un champ sur X dépendant du temps et invariant à tout instant (noté s), c'est à dire de la forme*[1] *:*

$$\mathbf{V}(x,s) = \theta_x^{-1}.\mathbf{v}(s)$$

où $\mathbf{v}(s)$ est une fonction de classe C^1 à valeurs dans T_eX, l'espace tangent en l'unité e du groupe. Alors $\mathbf{V}$ est transformé par ρ en un champ image $\tilde{\mathbf{V}}$ sur $\rho(X)$ qui se prolonge sur l'espace $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ des matrices de taille $n\times n$ en un champ linéaire et donc intégrable.

Démonstration : Par définition d'un champ image, on a pour tout $\tilde{x}$ de $\rho(X)$

$$\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{x},s) = \rho^*\mathbf{V}(\tilde{x},s) = T_x\rho.\mathbf{V}(x,s)$$

où $x=\rho^{-1}(\tilde{x})$ (ρ est injective). Notons que l'on a

$$\theta_x^{-1} = (T_x\tau_x)^{-1} = T_{\tau_x(x)}(\tau_x^{-1}) = T_e\tau_{x^{-1}}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{x},s) &= T_x\rho.T_e\tau_{x^{-1}}.\mathbf{v}(s)\\ &= T_e(\rho\circ\tau_{x^{-1}}).\mathbf{v}(s)\end{aligned}$$

Or pour tout y de X

$$\rho\circ\tau_{x^{-1}}(y) = \rho(x\,y) = \rho(x)\,\rho(y) = \tilde{\tau}_{\tilde{x}^{-1}}\circ\rho(y)$$

où $\tilde{x}=\rho(x)$ et $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$ désigne les translations de $GL(n,\mathbb{R})$. D'où

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{x},s) &= T_e(\tilde{\tau}_{\tilde{x}^{-1}}\circ\rho).\mathbf{v}(s)\\ &= T_{\tilde{e}}\tilde{\tau}_{\tilde{x}^{-1}}\circ T_e\rho.\mathbf{v}(s)\end{aligned}$$

1. θ_x est l'isomorphisme de transport défini dans la section 1.4.1 de la première partie

où $\tilde{e}$ est l'unité de $GL(n,\mathbb{R})$.

En notant

$$\tilde{\mathbf{v}} = T_e\rho.\mathbf{v}$$

on en déduit

$$\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{x},s) = T_{\tilde{e}}\tilde{\tau}_{\tilde{x}^{-1}}.\tilde{\mathbf{v}}(s) = \tilde{\theta}_{\tilde{x}}^{-1}.\tilde{\mathbf{v}}(s)$$

Remarquons alors que $\tilde{\tau}_{\tilde{x}^{-1}}$ peut être prolongé sur $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ ($\supset GL(n,\mathbb{R})$) en un opérateur linéaire. Par conséquent sa différentielle s'identifie à lui-même et $\tilde{\mathbf{V}}$ peut s'écrire

$$\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{x},s) = \tilde{x}.\tilde{\mathbf{v}}(s)$$

qui est bien linéaire en $\tilde{x}$ □

Proposition A.2 *Le champ $\mathbf{V}(x,s)$ est intégrable sur X.*

Soit x une condition initiale sur X. D'après la proposition précédente on obtient une solution $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{\mathbf{V}}$ de condition initiale $\tilde{x} = \rho(x)$. Il suffit alors de montrer que $\tilde{\gamma}$ reste sur $\rho(X)$ et que $\rho^{-1}(\tilde{\gamma})$ est une solution globale sur X de condition initiale x pour obtenir la proposition cherchée.

Or $\mathbf{V}$ est localement intégrable sur X car $\mathbf{V}$ est de classe C^1 au moins et X est localement compact. De plus les images par ρ de ces solutions locales sont des solutions locales de $\tilde{\mathbf{V}}$. On en déduit que toute solution locale γ de condition initiale $\gamma(0) = x$ coïncide localement avec $\rho^{-1}(\tilde{\gamma})$. En considérant alors le plus grand intervalle $[s_-, s_+]$ où ceci est vrai, on en déduit aisément que $\rho^{-1}(\tilde{\gamma})$ est globalement la solution cherchée □

Annexe B

Γ_i^n converge uniformément vers Γ

On suppose que Γ_i^n est obtenue progressivement par l'équation :

$$\Gamma_{i+1}^n = \Gamma_i^n + \frac{1}{n} R_i^n \Delta_i^n$$

où R_i^n et Δ_i^n convergent respectivement vers un repère mobile R et un vecteur Δ, et $\Gamma_0^n = \Gamma_0$ est un point fixe.

On pose

$$\gamma(s) = \Gamma_0 + \int_0^s R(u)\Delta(u)du$$

Alors Γ_i^n converge vers γ, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in[0,1]} \|\Gamma_{\lfloor sn\rfloor}^n - \gamma(s)\| = 0.$$

Démonstration : Pour simplifier les notations, on pose

$$\delta_i^n = R_i^n \Delta_i^n \text{ et } \delta(u) = R(u)\Delta(u)$$

D'où

$$\|\Gamma_{\lfloor sn\rfloor}^n - \gamma(s)\| = \|\Gamma_0^n + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor sn\rfloor-1} \delta_k^n - \Gamma(0) - \int_0^s \delta(u)\,du\|$$

Transformons la somme en intégrale

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor sn\rfloor-1} \delta_k^n = \sum_{k=0}^{\lfloor sn\rfloor-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \delta_{\lfloor un\rfloor}^n\,du = \int_0^{\frac{\lfloor sn\rfloor}{n}} \delta_{\lfloor un\rfloor}^n\,du$$

On en déduit, compte tenu du fait que $\Gamma_0^n = \Gamma(0)$

$$\|\Gamma_{t,\lfloor sn\rfloor}^n - \gamma(s)\| = \|\int_0^{\frac{\lfloor sn\rfloor}{n}} \delta_{\lfloor un\rfloor}^n\,du - \int_0^s \delta(u)\,du\|$$

$$\leq \int_0^{\frac{\lfloor sn \rfloor}{n}} \|\delta^n_{\lfloor un \rfloor} - \delta(u)\| \, du + \int_{\frac{\lfloor sn \rfloor}{n}}^{s} \|\delta(u)\| \, du$$

$$\leq \sup_{u \in [0,1]} \|\delta^n_{\lfloor un \rfloor} - \delta(u)\| + \frac{1}{n} \sup_{s \in [0,1]} \|\delta(s)\|$$

On conclut en utilisant le fait que δ_i^n converge uniformément vers δ, et que δ est borné sur le compact [0,1] $\square$

Annexe C

Solution numérique de $R' = R\tilde{\mathbf{\Omega}}$

Dans ce qui suit on notera SO_3, au lieu de $SO(3,\mathbb{R})$, l'espace des rotations de $\mathbb{R}^3$.

Pour résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} R'(s) = R(s)\,\tilde{\mathbf{\Omega}}(s) \\ R(0) = R_0 \end{cases} \tag{C.1}$$

nous pouvons considérer R comme une matrice de l'espace vectoriel $\mathcal{M}(3,\mathbb{R})$ et utiliser la méthode d'Euler classique, avec un pas de résolution $\frac{1}{n}$, qui permet d'obtenir progressivement une approximation R_i de $R(\frac{i}{n})$ par l'équation :

$$R_{i+1} = R_i + \frac{1}{n}\,R_i\,\tilde{\mathbf{\Omega}}(\frac{i}{n}) \tag{C.2}$$

Cependant, même si R_i est une rotation, R_{i+1} n'est pas nécessairement une rotation car l'équation est considérée dans $\mathcal{M}(3,\mathbb{R})$ et non dans SO_3. Ceci peut ou non être problématique, mais nous préférons résoudre directement le système différentiel C.1 dans SO_3 puisque $R\,\tilde{\mathbf{\Omega}}$ peut être considéré comme un champ (invariant à tout "instant") sur SO_3[1]. Pour cela nous allons considérer une carte locale de SO_3 afin de "ramener" le système C.1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$ où nous pourrons utiliser la méthode d'Euler.

En effet, si (V,ϕ) est une carte de SO_3 autour d'une rotation R_0, et $g = \phi^{-1}$ est la paramétrisation correspondante (voir figure C.1), le système C.1 se transforme via la paramétrisation en

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = (dg)^{-1}\,.g(\mathbf{v})\,\tilde{\mathbf{\Omega}} \\ \mathbf{v}_0 = \phi(R_0) \end{cases} \tag{C.3}$$

Un moyen canonique de paramétrer SO_3 est d'utiliser l'application exponentielle parfois

1. L'isomorphisme de transport θ_R introduit dans la section 1.4.1 s'identifie en effet dans le cas de SO_3 à l'application $\tilde{\mathbf{\Omega}} \mapsto R\,\tilde{\mathbf{\Omega}}$.

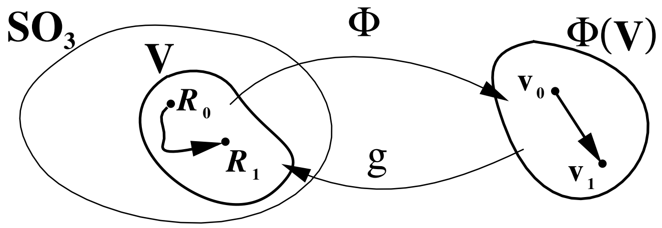

FIG. C.1 – Une carte autour d'une rotation R_0.

appelée application normale canonique. Notons que l'exponentielle peut être définie, dans le cas de SO_3, aussi bien par la structure de groupe de Lie de SO_3 [2] que par la structure riemanienne héritée de l'espace euclidien $\mathcal{M}(3,\mathbb{R})$ [3]. Pour montrer la coïncidence des deux définitions, il suffit en effet de remarquer que SO_3 agit sur $\mathcal{M}(3,\mathbb{R})$ comme groupe d'isométrie par l'action

$$M \mapsto RM.$$

Autour de l'identité l'exponentielle prend la forme suivante :

$$\begin{array}{ccl} (\mathbb{R}^3, 0) & \to & (SO_3, Id) \\ \mathbf{v} & \mapsto & \exp(\tilde{\mathbf{v}}) = Id + \tilde{\mathbf{v}} + \dfrac{\tilde{\mathbf{v}}^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\tilde{\mathbf{v}}^n}{n!} + \ldots = Id + \dfrac{\sin\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\,\tilde{\mathbf{v}} + \dfrac{1-\cos\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\tilde{\mathbf{v}}^2 \end{array}$$

Cette paramétrisation peut être translatée autour d'une rotation R quelconque :

$$\mathbf{v} \mapsto R\,\exp(\tilde{\mathbf{v}})$$

La différentielle de l'exponentielle s'obtient soit de manière algébrique comme dans [Fau89] soit plus simplement en différenciant le membre de droite dans l'expression de l'exponentielle ci-dessus (c'est peut-être moins joli mais incomparablement plus court). On a alors ($T_{Id}SO_3$ étant identifié à $\mathbb{R}^3$) :

$$d\exp(\tilde{\mathbf{v}}).\mathbf{h} = R\,\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{v},\mathbf{h})$$

où

$$R = \exp(\tilde{\mathbf{v}})$$

et

$$\mathbf{b}(\mathbf{v},\mathbf{h}) = \frac{\|\mathbf{v}\| - \sin\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} < \mathbf{v},\mathbf{h} > \mathbf{v} + \frac{\sin\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\,\mathbf{h} + \frac{1-\cos\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{h}\wedge\mathbf{v}$$

2. $\exp(\tilde{\mathbf{v}})$ est alors la valeur $\gamma(1)$ de la courbe intégrale γ du champ invariant $R\tilde{\mathbf{v}}$ et de condition initiale $\gamma(0) = Id$.

3. $\exp(\tilde{\mathbf{v}})$ est alors la valeur $\gamma(1)$ de la géodésique γ de condition initiale $\gamma(0) = Id$ et $\gamma'(0) = \tilde{\mathbf{v}}$.

En identifiant $R\,\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{v},\mathbf{h})$ et $R\,\tilde{\mathbf{\Omega}}$ nous en tirons $\mathbf{h}$

$$\mathbf{h} = (d\exp(\tilde{\mathbf{v}}))^{-1}.R\,\tilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{a}(\mathbf{v},\mathbf{\Omega})$$

où

$$\mathbf{a}(\mathbf{v},\mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Omega} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\wedge\mathbf{\Omega} + \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} - \frac{\sin\|\mathbf{v}\|}{2\|\mathbf{v}\|(1-\cos\|\mathbf{v}\|)}\right)\mathbf{v}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{\Omega})$$

En reprenant le système C.3 on obtient ainsi une “bonne” méthode d'Euler à l'aide du schéma suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0 & = 0 \\ R_i & = R_0\,\exp(\tilde{\mathbf{v}}_i) \\ \mathbf{v}_{i+1} & = \mathbf{v}_i + \frac{1}{n}\,\mathbf{a}(\mathbf{v}_i, \mathbf{\Omega}(\frac{i}{n})) \end{cases}$$

Nous avons translaté la paramétrisation autour de R_0, mais nous pouvons tout aussi bien la recentrer autour de R_i à chaque étape. Puisque $\mathbf{a}(\mathbf{0},\mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Omega}$, il apparaît qu'**il est équivalent d'utiliser la méthode d'Euler centrée à chaque pas ou de considérer $\mathbf{\Omega}$ constant sur chaque intervalle** $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$. En effet, l'équation $\mathcal{R}' = R\,\tilde{\mathbf{\Omega}}(\frac{i}{n})$ de condition initiale R_i admet pour solution

$$R(s) = R_i\,\exp(s\,\tilde{\mathbf{\Omega}}(\frac{i}{n}))$$

Nous avons implémenté les deux méthodes d'Euler (centrée ou non) et nous n'avons pas observé de différence sensible[4]. Nous avons conservé la méthode centrée à chaque étape qui requiert moins de calcul. Nous avons ainsi remplacé l'équation de propagation C.2 par :

$$R_{i+1} = R_i\,\exp(\frac{1}{n}\,\tilde{\mathbf{\Omega}}(\frac{i}{n}))$$

4. D'une manière générale, l'influence de la paramétrisation employée pour la méthode d'Euler n'intervient qu'au deuxième ordre.

Annexe D

Interpolation des repères (seconde version)

Dans ce qui suit le terme "converge" doit être compris dans le sens de la définition 2.3 de la section 2.1.3. C'est une façon condensée de dire que l'erreur $\|y_i^n - y(\frac{i}{n})\|$, entre une suite de séquences $(y_i^n)_{0\leq i\leq n}$ et une fonction y, converge uniformément vers 0.

Nous devons vérifier que le schéma d'interpolation de $R_{t,i}^n$:

$$\begin{cases} R_{t,0}^n = R_{t,0} \\ R_{t,i+1}^n = R_{t,i}^n \, r_{t,i}^n \end{cases} \tag{D.1}$$

où $r_{t,i}^n$ est le point de paramètre t sur la géodésique (de $SO(3,\mathbb{R})$) joignant $r_{0,i}^n$ et $r_{1,i}^n$, converge vers la solution du système

$$\begin{cases} R_t(0) = R_{t,0} \\ R_t'(s) = R_t(s)\, \tilde{\mathbf{\Omega}}_t(s) \end{cases} \tag{D.2}$$

où $\mathbf{\Omega}_t$ est une interpolation linéaire des limites $\mathbf{\Omega}_0$ et $\mathbf{\Omega}_1$ de $\mathbf{\Omega}_{0,i}^n = n(r_{0,i}^n - Id)$ et de $\mathbf{\Omega}_{1,i}^n = n(r_{1,i}^n - Id)$.

Pour cela nous montrerons que

1. $\mathbf{\Omega}_{0,i}^n$ et $\mathbf{\Omega}_{1,i}^n$ converge effectivement vers des VVRI $\mathbf{\Omega}_0$ et $\mathbf{\Omega}_1$ lorsqu'on utilise les constructions du repère de Frenet et du RTRP de la section 2.2.2,

2. que $\mathbf{\Omega}_{t,i}^n = n(r_{t,i}^n - Id)$ converge alors vers $\mathbf{\Omega}_t = (1-t)\,\mathbf{\Omega}_0 + t\,\mathbf{\Omega}_1$,

3. et que, dans ce cas, le schéma D.1 converge bien vers une solution de D.2.

Nous utiliserons le fait que (c.f. par exemple [MT86])

$$\exp(\tilde{\mathbf{v}}) = Id + \tilde{\mathbf{v}} + o(\|\mathbf{v}\|)$$

où exp est l'exponentielle de matrice, et que

$$\log(Id + r) = r + o(\|r\|)$$

où log est l'inverse local de exp.

Démonstration du point 1 : pour le RTRP nous avons par construction :

$$r_i^n = \exp(\alpha_i^n \tilde{\mathbf{b}}_i^n)$$

d'où

$$n(r_i^n - Id) = n\alpha_i^n \mathbf{b}_i^n + o(n\alpha_i^n \mathbf{b}_i^n)$$

Or nous avons vu section 2.2.3 que cette expression converge bien vers le VVRI du RTRP.

Pour le repère de Frenet, écrivons $\mathbf{\Omega}_i^n$ sous la forme

$$\mathbf{\Omega}_i^n = n(r_i^n - Id) = (R_i^n)^{-1} \frac{R_{i+1}^n - R_i^n}{1/n}$$

Comme $(R_i^n)^{-1}$ converge vers R^{-1}, il suffit de montrer que $n(R_{i+1}^n - R_i^n)$ converge vers $R' = R\tilde{\mathbf{\Omega}}$. Ou encore, puisque

$$n(R_{i+1}^n - R_i^n) = n(R_{i+1}^n - R(\frac{i+1}{n})) - n(R_i^n - R(\frac{i}{n})) + n(R(\frac{i+1}{n}) - R(\frac{i}{n}))$$

que la convergence R_i^n est en $o(\frac{1}{n})$. Nous laissons le lecteur s'assurer de cette dernière affirmation□

Démonstration du point 2 : par définition de $r_{t,i}^n$ et des géodésiques de $SO(3, \mathbb{R})$ nous avons :

$$r_{t,i}^n = r_{0,i}^n \exp(t \log((r_{0,i}^n)^{-1} r_{1,i}^n))$$

Or

$$(r_{0,i}^n)^{-1} r_{1,i}^n = Id + (r_{0,i}^n)^{-1} \frac{\mathbf{\Omega}_{0,i}^n - \mathbf{\Omega}_{1,i}^n}{n}$$

d'où, en utilisant les approximations d'ordre 1 du logarithme et de l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_{t,i}^n &= n\,(r_{0,i}^n \exp(t \log((r_{0,i}^n)^{-1} r_{1,i}^n)) - Id) \\
&= n\,(r_{0,i}^n \exp(t\,(r_{0,i}^n)^{-1} \frac{\mathbf{\Omega}_{0,i}^n - \mathbf{\Omega}_{1,i}^n}{n} + o(\frac{1}{n})) - Id) \\
&= n\,(r_{0,i}^n (Id + t\,(r_{0,i}^n)^{-1} \frac{\mathbf{\Omega}_{0,i}^n - \mathbf{\Omega}_{1,i}^n}{n} + o(\frac{1}{n})) - Id) \\
&= n\,(r_{0,i}^n - Id) + t\,(\mathbf{\Omega}_{0,i}^n - \mathbf{\Omega}_{1,i}^n) + no(\frac{1}{n}) \\
&= \mathbf{\Omega}_{0,i}^n + t\,(\mathbf{\Omega}_{0,i}^n - \mathbf{\Omega}_{1,i}^n) + o(1)
\end{aligned}$$

□

Démonstration du point 3 : par définition de $\mathbf{\Omega}^n_{t,i}$, l'équation de propagation du système D.1 se met sous la forme

$$R^n_{t,i+1} = R^n_{t,i} + \frac{1}{n}\, R^n_{t,i}\, \tilde{\mathbf{\Omega}}^n_{t,i}$$

Notons M^n_i l'approximation par la méthode d'Euler du système D.2 :

$$M^n_{i+1} = M^n_i + \frac{1}{n}\, M^n_i\, \tilde{\mathbf{\Omega}}_t(\frac{i}{n})$$

Soustrayons ces deux équations :

$$R^n_{t,i+1} - M^n_{i+1} = R^n_{t,i} - M^n_i + \frac{1}{n}(R^n_{t,i} - M^n_i)\, \tilde{\mathbf{\Omega}}^n_{t,i} + \frac{1}{n} M^n_i\, (\tilde{\mathbf{\Omega}}^n_{t,i} - \tilde{\mathbf{\Omega}}_t(\frac{i}{n}))$$

En posant

$$e^n_i = \|R^n_{t,i} - M^n_i\|$$

et

$$\epsilon^n = \sup_i \|\tilde{\mathbf{\Omega}}^n_{t,i} - \tilde{\mathbf{\Omega}}_t(\frac{i}{n})\|$$

et

$$K = \sup_{i,n} \|\tilde{\mathbf{\Omega}}^n_{t,i}\|$$

nous voyons par l'inégalité triangulaire que

$$e^n_{i+1} \leq e^n_i (1 + \frac{K}{n}) + \frac{\epsilon_n}{n}$$

Un calcul classique en analyse numérique [Bar77] montre que

$$e^n_i \leq e^n_0 \exp(K) + \epsilon_n \frac{\exp(K) - 1}{K}$$

Comme e^n_0 est nul et que ϵ_n tend vers 0 d'après le point 2, on en déduit le résultat cherché (on utilise le fait que M^n_i converge vers la solution de D.2)$\square$

Annexe E

La topologie en tout ou rien

Dans [Mat88] on ne s'intéresse en fait qu'à $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{G}$) et non à l'ensemble des compacts (pour des raisons que j'ignore...). Nous présentons donc ici la topologie sur $\mathcal{F}$. Cette topologie, appelée topologie en tout ou rien[1] est définie de la manière suivante :

1. on définit des ensembles de fermés, notés $\mathcal{F}_K^{G_1,...,G_n}$ à partir d'une famille finie quelconque d'ouverts $G_1, ..., G_n$ et d'un compact quelconque K : c'est l'ensemble des fermés de $\mathcal{F}$ qui rencontrent chacun des G_i et évitent K (c.f. figure E.1),
2. ces ensembles $\mathcal{F}_K^{G_1,...,G_n}$ sont par définition des ouverts de $\mathcal{F}$ et la topologie en tout ou rien est la topologie engendrée par ces ouverts (c.f. [Bre83] p. 33).

Cette topologie est compacte et séparable, une base dénombrable d'ouverts étant fournie par les ensembles $\mathcal{F}_{\bar{B}}^{B_1,...,B_n}$, où $B, B_1, ..., B_n$ sont dans une base dénombrable d'ouverts relativement compacts (i.e d'adhérence compacte) de E (qui est par hypothèse localement compact et séparable).

Convergence dans $\mathcal{F}$ Dans $\mathcal{F}$, que nous supposerons désormais muni de sa topologie, la convergence d'une suite (F_i) de fermés vers un fermé F peut se caractériser par l'une des conditions suivantes :

1. tout ouvert rencontrant F rencontre tous les F_i à partir d'un certain rang et tout compact évitant F évite tous les F_i à partir d'un certain rang,
2. l'ensemble des limites et des valeurs d'adhérences des suites $(x_i), x_i \in F_i$, coïncident et s'identifient à F,
3. si de plus E est un espace métrique, pour tout x de E, $d(x, F_i)$ converge et vaut $d(x, F)$.

1. le terme anglais *hit or miss topology* est plus parlant puisque, intuitivement, deux fermés sont proches s'ils *rencontrent* les mêmes ouverts et *évitent* les mêmes compacts.

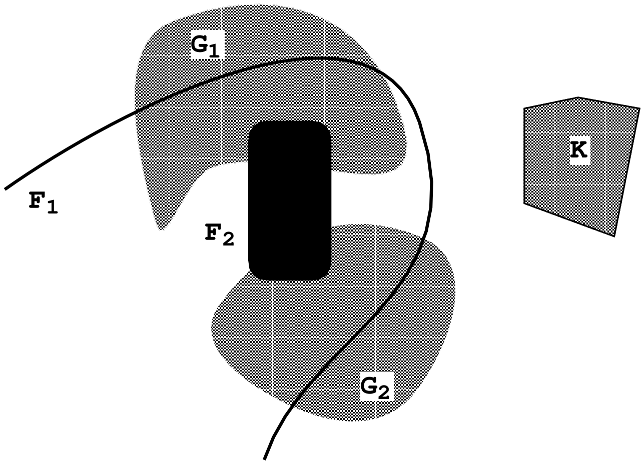

FIG. E.1 – Les fermés F_1 et F_2 sont dans l'ouvert $\mathcal{F}_K^{G_1,G_2}$ défini par les ouverts G_1 et G_2 et le compact K.

Limites supérieures et inférieures On définit alors la limite supérieure $\overline{Lim}\, F_i$ d'une suite quelconque (F_i) de fermés par l'une des deux caractérisations équivalentes suivantes :

1. $\overline{Lim}\, F_i$ est le plus petit fermé tel que tout compact l'évitant évite tous les F_i à partir d'un certain rang,
2. $\overline{Lim}\, F_i$ est l'ensemble des valeurs d'adhérences des suites $(x_i), x_i \in F_i$.

On définit de même la limite inférieure $\underline{Lim}\, F_i$ d'une suite quelconque (F_i) de fermés par l'une des deux caractérisations équivalentes suivantes :

1. $\underline{Lim}\, F_i$ est le plus grand fermé tel que tout ouvert le rencontrant rencontre tous les F_i à partir d'un certain rang,
2. $\underline{Lim}\, F_i$ est l'ensemble des limites des suites convergentes $(x_i), x_i \in F_i$.

On note[2] alors qu'une suite (F_i) de fermés converge vers un fermé F si et seulement si

$$\underline{Lim}\, F_i = \overline{Lim}\, F_i = F$$

2. Dans [SMa88] on définit la notion de treillis complet comme un ensemble partiellement ordonné tel que toute sous-famille finie ou non admet un plus petit majorant (le sup) et un plus grand minorant (l'inf) pour la relation d'ordre. On note ensuite que $\mathcal{F}$ forme un treillis complet pour l'inclusion avec

$$\sup F_i = \overline{\bigcup_i F_i},$$

$$\inf F_i = \bigcap_i F_i$$

Semi-continuité Les limites sup et inf étant définies on dira qu'une fonction f d'un espace topologique séparable $E^{'}$ dans $\mathcal{F}$ est *semi-continue supérieurement* si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée pour toute suite de $E^{'}$ convergente, $x_i \mapsto x$:

1. ou bien $\overline{Lim}\, f(x_i) \subset f(x)$,
2. ou bien tout compact évitant $f(x)$ évite tous les $f(x_i)$ à partir d'un certain rang,
3. ou bien toute valeur d'adhérence d'une suite $(y_i), y_i \in f(x_i)$ est dans $f(x)$.

Ce qui équivaut à dire que pour tout compact de E, l'image réciproque des fermés qui l'évitent est un ouvert de $E^{'}$.

On définit de même la *semi-continue inférieure.* f est semi-continue inférieurement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée pour toute suite de $E^{'}$ convergente, $x_i \mapsto x$:

1. ou bien $\underline{Lim}\, f(x_i) \supset f(x)$,
2. ou bien tout ouvert rencontrant $f(x)$ rencontre tous les $f(x_i)$ à partir d'un certain rang,
3. ou bien tout point de $f(x)$ est limite d'une suite $(y_i), y_i \in f(x_i)$.

Ce qui équivaut à dire que pour tout ouvert de E, l'image réciproque des fermés qui le rencontrent est un ouvert de $E^{'}$.

On s'attend alors à retrouver les définitions classiques des limite sup et inf d'une suite (x_i) :

$$\overline{lim}\, x_i = \inf_i \sup_{j\geq i} x_j,$$
$$\underline{lim}\, x_i = \sup_i \inf_{j\geq i} x_j$$

Or seule la première relation est juste dans notre cas (i.e. $\overline{Lim}\, F_i = \bigcap_i \overline{\bigcup_{j\geq i} F_j}$). Ces définitions sont donc propres à la morphologie mathématique et l'on doit se garder de toute généralisation...

Annexe F

Construction d'un champ sur un triangle

Nous donnons un exemple de construction d'un champ de vecteurs sur un triangle quelconque, ne s'annulant qu'aux sommets du triangle et tangent aux arêtes orientées (de manière non cyclique) du triangle. La définition de ce champ doit être telle qu'en recollant deux triangles le long d'une arête commune et de même orientation, leurs champs se recollent continûment.

Nous procédons en deux étapes. En premier lieu nous définissons un champ sur un triangle particulier, qui est nul au sommet de ce triangle et tangent à ses arêtes. Puis, dans un second temps, nous "renormalisons" ce champ sur un triangle équilatéral. De cette façon nous pouvons définir un champ convenable sur un triangle quelconque par une simple affinité. Par construction les champs ainsi définis sur des triangles adjacents se recolleront continûment.

F.1 Construction d'un champ particulier

Nous allons construire un champ sur un triangle à partir d'un champ très simple défini sur un secteur D de $\mathbb{R}^2$. Pour cela nous allons identifier $\mathbb{R}^2$ avec le complémentaire de la droite à l'infini dans le plan projectif $\mathcal{P}^2$, ce complémentaire pouvant en effet être muni d'une structure d'espace affine.

Puis, par un changement de coordonnées projectives, nous "ramenons" dans le plan affine une portion de la droite à l'infini contenant les directions des droites internes au secteur D, afin de transformer ce secteur (et son champ) en un triangle Δ.

Soit H le champ :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

défini sur le secteur D de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x > y \\ x > -y \end{cases}$$

H est un champ tangent aux branches d'hyperboles $x^2 - y^2 = k^2$ qui constituent un feuilletage de D (voir figure F.1). L'immersion canonique $(x,y) \mapsto (x,y,1)$ de $\mathbb{R}^2$ dans le plan projectif[1]

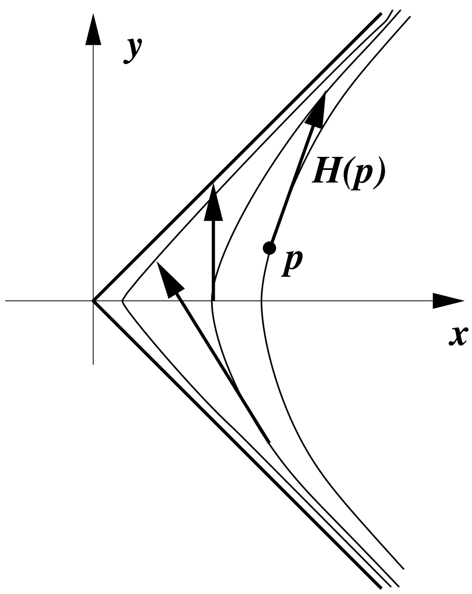

FIG. F.1 – H est un champ tangent aux branches d'hyperboles $x^2 - y^2 = k^2$.

et le changement des coordonnées projectives :

$$(x,y,1) \mapsto (x,y,x)$$

permettent par reprojection sur le plan $\Pi(x+z=1)$ de définir une application de D dans Π (voir figure F.2) :

$$(x,y) \mapsto (\frac{x}{x+1}, \frac{y}{x+1}, \frac{x}{x+1})$$

En munissant Π de la base $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ on obtient un difféomorphisme ϕ de D dans

1. Pour nous, le plan projectif est donc le quotient de $\mathbb{R}^3$ privé de 0 par la relation de proportionnalité.

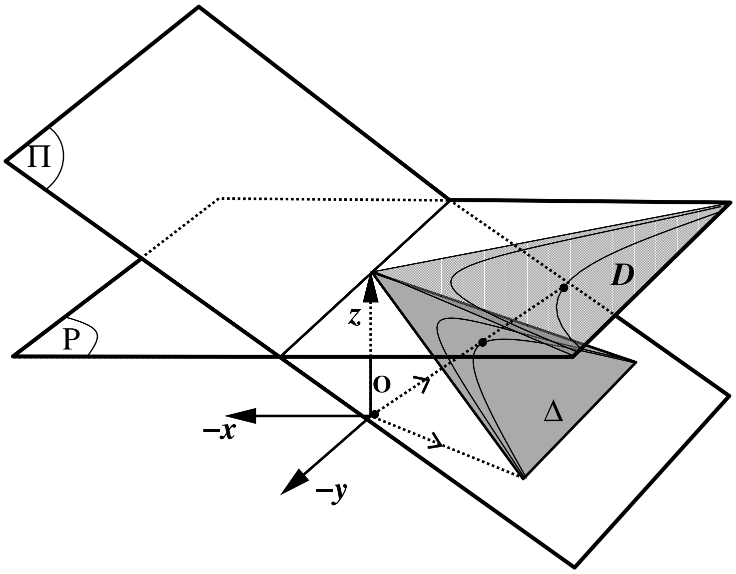

Fig. F.2 – Changement de coordonnées projectives.

l'intérieur du triangle $\Delta = ((1,-1),(1,1),(0,0))$:

$$\begin{array}{cccc} \phi : & D & \longrightarrow & \Delta \\ & (x,y) & \longmapsto & (\frac{x}{x+1}, \frac{y}{x+1}) \end{array}$$

ϕ transforme le champ H en un champ image $\phi^* H$ avec :

$$\phi^* H \circ \phi(x,y) = d\phi.H(x,y) = \frac{1}{(1+x)^2} \begin{pmatrix} y \\ x^2 - y^2 + x \end{pmatrix}$$

ou encore, puisque $\phi^{-1}(u,v) = (\frac{u}{1-u}, \frac{v}{1-u})$:

$$\phi^* H(u,v) = \begin{pmatrix} v(1-u) \\ u - v^2 \end{pmatrix}$$

Ce champ se prolonge continûment sur les bords de Δ (voir figure F.3)

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \phi(u,-u) & = & u(1-u) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{sur} & a_1 \\ \phi(1,v) & = & (1-v^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{sur} & a_2 \\ \phi(u,u) & = & u(1-u) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{sur} & a_3 \end{array} \right.$$

et ne s'annule qu'aux sommets de Δ.

La droite à l'infini est constituée, par définition, des classes de points dont la troisième coordonnée est nulle.

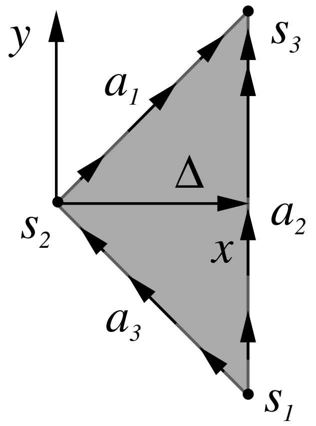

FIG. F.3 – Le champ se prolonge continûment sur les bords de Δ...

F.2 Renormalisation

Par une affinité A on envoie Δ sur un triangle équilatéral Δ_1 et le champ ϕ^*H sur le champ $A.\phi^*H$. On renormalise alors ce champ sur Δ_1 privé de ses sommets, en le divisant par sa norme. On note H_1 le champ renormalisé.

Soit alors h une fonction C^∞ de [0,1] dans [0,1] telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$ et dont les dérivées sont nulles à tout ordre en 0 et 1. Sur le disque centré en (0,0) de rayon 1/3 on définit h_1 par :

$$h_1(p) = h(\|3p\|)$$

Puis on définit h_2 sur $\mathbb{R}^2$ par translation de h_1 aux trois sommets de Δ_1 en la prolongeant par 1 (c.f. figure F.4). On pose enfin,

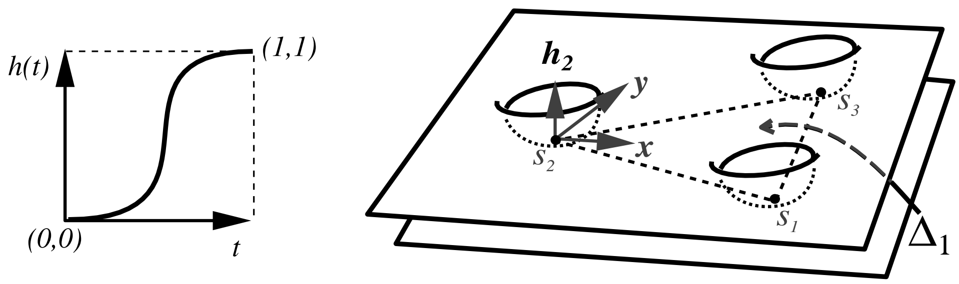

FIG. F.4 – À gauche : le profil de h. À droite : le graphe de h_2.

$$H_2 = h_{2|_{\Delta_1}}.H_1$$

H_2 (voir figure F.5) est C^∞ sur Δ_1, en particulier au niveau des trois sommets. On obtient

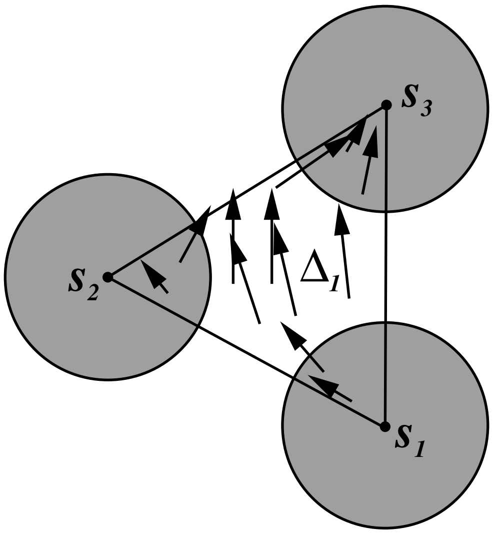

FIG. F.5 – Le champ H_2.

le champ cherché sur un triangle quelconque par affinité du triangle Δ_1 et de son champ H_2. Il est clair que l'on peut raccorder continûment les champs ainsi définis sur des triangles adjacents.

Lexique

Ce lexique comprend la plupart des termes mathématiques employés dans ce mémoire. Nous nous sommes contentés de recopier des définitions extraites d'ouvrages classiques en indiquant chaque fois une référence précise. Les mots en *italique* sont eux-mêmes définis dans ce lexique.

Application tangente [BG87], §2.5.13. Soient X et Y deux *variétés* de dimension d et e, f un C^p-*morphisme* de X dans Y, x un point de X. On appelle application tangente à f en x, l'application linéaire $T_x f$ de l'*espace tangent* $T_x X$ dans $T_{f(x)}Y$ définie par :

$$T_x f = \eta_{f(x)}^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x)) \circ \theta_x$$

où θ_x et $\eta_{f(x)}$ sont les isomorphismes entre $T_x X$ et $\mathbb{R}^d$ et $T_{f(x)}Y$ et $\mathbb{R}^e$ associés à des *cartes* (U, φ) et (V, ψ).

Atlas [BG87], §2.2.1. Soit X un ensemble et p un entier strictement positif. On appelle atlas d-dimensionnel de classe C^p sur X, un ensemble de couples $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, appelés cartes, tels que les 3 axiomes suivants soient satisfaits :

1. Les U_i sont des sous ensembles de X et $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

2. Chaque φ_i est une bijection de U_i sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

3. Pour tout couple (i, j) l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un isomorphisme de classe C^p de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ dans $\varphi_j(U_i \cap U_j)$.

Carte Voir *Atlas*.

Champ de vecteurs On appelle champ de vecteurs sur une *variété* X une *section* de son *fibré tangent* TX.

Connexion linéaire [Die71a], §17.18.1. On appelle connexion (linéaire) sur une *variété* X un X-morphisme (c.f *espace fibré*) de $TX \oplus TX$ dans TTX, le *fibré tangent* du fibré tangent, vérifiant des conditions de linéarité et de projections évidentes relativements aux diverses fibrations mises en jeux (c.f. [Die71a], §17.16.3. pour plus de détails). À toute connexion on peut associer une unique *dérivation covariante* vérifiant les conditions 1,2 et 3 de la définition de *dérivation covariante* d'une variété riemanienne. On dit que cette dérivation est sans torsion si elle vérifie de plus la condition 4, et qu'elle est compatible avec une métrique sur X si elle vérifie de plus la condition 5.

Crochet de Lie Voir *dérivation suivant un champ de vecteurs.*

Dérivation covariante [Mal72], §III.8.4. Soit X une *variété riemanienne* de classe C^2, alors il existe un unique opérateur ∇, appelé dérivation covariante sur X, qui associe à tout couple A, B de *champs de vecteurs* de classe C^1 un champ de vecteurs $\nabla_A B$ de classe C^0 et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\nabla_A B$ est linéaire en A et linéaire en B
2. pour toute fonction réelle sur X, $\nabla_{fA} B = f \nabla_A B$
3. et $\nabla_A fB = f\nabla_A B + (Af)B$ où Af est la *dérivation* de f suivant A
4. $\nabla_A B - \nabla_B A = [A, B]$ où $[.,.]$ est le *crochet de Lie* de A et B.
5. $A\langle B, C\rangle = \langle \nabla_A B, C\rangle + \langle B, \nabla_A C\rangle$ où $\langle .,.\rangle$ désigne le tenseur métrique sur X.

Dérivation suivant un champ de vecteurs [Die71a], §17.14.1. Soit X une *variété*, A un *champ de vecteurs* sur X et $f : X \to \mathbb{R}$ une application différentiable, on appelle dérivation de f suivant le champ A, l'application $Af : X \to \mathbb{R}$:

$$x \mapsto Af(x) = df(x).A$$

où $df(x)$ est la *différentielle* de f au point x.

L'opérateur $f \mapsto Af$ s'annule si f est constante et vérifie la relation classique de dérivation d'un produit :

$$A(fg) = (Af)g + f(Ag)$$

Inversement on montre qu'on peut associer à tout opérateur vérifiant ces deux propriétés un unique champ de vecteurs dont il est la dérivation.

On définit alors le crochet de Lie de deux champs de vecteurs A et B comme le champ de vecteurs $[A, B]$ associé à la dérivation $f \mapsto A(Bf) - B(Af)$.

Difféomorphisme Un C^p-difféomorphisme est un C^p-*morphisme* inversible dont l'inverse est également un C^p-*morphisme*.

Différentielle [BG87], §2.5.23. Soit X une *variété*, E un espace vectoriel de dimension finie et f un C^p-*morphisme* de X dans E. On appelle différentielle de f en x, et on note $df(x)$, l'application $\theta_{f(x)} \circ T_x f$ de l'*espace tangent* $T_x X$ dans E, où $T_x f$ est l'*application tangente* de f en x et $\theta_{f(x)}$ est l'isomorphisme canonique $T_{f(x)}E \to E$.

Espace fibré [Die71a] §16.12.1. On appelle espace fibré ou fibration un triplet (X, B, π), où X et B sont des *variétés*, π est une *submersion* surjective et vérifie la condition suivante dite de trivialité locale :

– Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b dans B, une variété F et un *difféomorphisme*

$$\varphi : U \times F \to \pi^{-1}(U)$$

tel que $\pi(\varphi(y, t)) = y$ quels que soient $y \in U$ et $t \in F$.

On dit que X est l'espace de fibration, B sa base et π sa projection ; pour tout $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ est une sous-variété fermée appelée fibre (au dessus) de b.

Lorsque les fibres sont des espaces vectoriels de dimension finie et que φ est linéaire en restriction à chaque fibre, on dit que le triplet (X, B, π) est un (espace) fibré vectoriel. Si E et F sont deux fibrés vectoriels de même base B, on définit la somme directe

$$E \oplus F$$

comme le fibré vectoriel de base B dont la fibre au dessus de $b \in B$ est la somme directe des fibres de E et F au dessus de b.

De plus, on appelle section d'une fibration (X, B, π), une application s de la base B dans X telle que :

$$\pi \circ s = Id_B.$$

Si (X, B, π) et (Y, B, p) sont deux fibrations de même base B, on appelle B-morphisme un *morphisme* de X dans Y vérifiant

$$\pi = p \circ f$$

Pour une bonne introduction aux espaces projetées et aux espaces fibrés, voir [Pha92], chapitre VI.

Espace tangent [BG87], §2.5.9. Soient X une *variété*, de dimension d, de classe C^p, x un point de X, (U,φ) et (V,ψ) deux *cartes* de X en x. Soient u et v deux éléments de $\mathbb{R}^d$. La relation $\mathcal{R}$, définie entre les triplets (U,φ,u) et (V,ψ,v) par :

$$(U,\varphi,u)\,\mathcal{R}\,(V,\psi,v) \quad \text{si et seulement si} \quad (\varphi\circ\psi^{-1})'(\psi(x))(u) = v$$

est une relation d'équivalence.

On appelle vecteur tangent à X en x une classe d'équivalence de $\mathcal{R}$. On note T_xX, et on appelle espace tangent à X en x, l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

Fibré tangent [BG87], §2.5.25. Soit X une *variété* de dimension d et de classe C^p. La réunion des *espaces tangents* T_xX lorsque x parcourt X peut être canoniquement muni d'une structure de variété de dimension $2d$ et de classe C^{p-1}. Cette variété est appelé le fibré tangent de X.
TX est un *espace fibré* vectoriel de base X et de fibres T_xX.

Groupe de Lie [Mal72], §III.1.1. On appelle structure de groupe de Lie sur G, la donnée :

1. d'une structure de *variété* de classe C^3 sur G,
2. et d'une structure de groupe sur G

reliées par la condition suivante de compatibilité : le produit

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \to & G \\ (g,g') & \mapsto & gg' \end{array}$$

et l'inverse

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

sont des C^3-*morphismes*.

Notons que l'on remplace souvent la condition C^3 par une condition C^∞ ([Die71a]).

Homéomorphisme *Morphisme* continu et inversible dont l'inverse est également continu.

Homotopie [Die71a], §16.26.1. Soient f et g deux applications continues d'un espace topologique X dans un espace topologique Y. Une homotopie de f dans g est une application continue φ de $X\times[0,1]$ dans Y telle que :

$$\varphi(x,0) = f(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x,1) = g(x).$$

Lorsqu'une telle homotopie existe, on dit que f est homotope à g.

Image d'un champ de vecteur [Pha92], §III.2. Soient v un *champ de vecteurs* sur une *variété* X et ϕ un *difféomorphisme* de X sur une variété Y. On appelle image du champ de vecteurs v par le difféomorphisme ϕ le champ de vecteurs $\phi^* v$ défini sur Y par :

$$\phi^* v(\tilde{x}) = T_x\phi.v(x), \text{ où } x = \phi^{-1}(\tilde{x}).$$

Immersion [BG87], §2.6.9. Soient X et Y deux *variétés* et $f : X \to Y$ un *morphisme*. On dit que f est une immersion en x si l'*application tangente* $T_x f$ est injective. On dit que f est une immersion si la propriété est vraie pour tout x de X.

Morphisme, Morphisme de groupe de Lie [BG87], §2.3.1. Soient X et Y deux *variétés* de dimension d et e et de classe C^q et C^r. Soit $p \leq \inf(q, r)$. On dit qu'une application continue f de X dans Y est un C^p-morphisme, si pour toute *carte* (U, φ) en x, et pour toute carte (V, ψ) de Y en $f(x)$, l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^p de $\phi(U \cap f^{-1}(V))$ dans $\mathbb{R}^e$.

Si X et Y sont des *groupes de Lie*, on dit qu'une application f de X dans Y est un C^p-morphisme de groupe de Lie, si f est un C^p-morphisme pour les variétés sous-jacentes à X et Y et si f est un morphisme de groupe pour les groupes sous-jacents à X et Y.

Opération (ou action) d'un groupe [Fer88], §I.1. Soit G un groupe de loi . et d'élément neutre e. On appelle opération à gauche de G sur un ensemble X une application $F : G \times X \to X$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall x \in X,\ F(e, x) = x.$
2. $\forall h, g \in G, \forall x \in X,\ F(g, F(h, x)) = F(g.h, x)$

On dit que cette opération est transitive si

$$\forall x \in X,\ F(G, x) = E$$

On dit qu'elle est simplement transitive si

$$\forall x, y \in X,\ \exists !\, g \in G,\ F(g, x) = y$$

[Die71a], §16.10.1. Si G est un *groupe de Lie* et X une *variété*, on dit que G opère différentiablement sur X si l'on s'est donné une opération à gauche de G sur X qui est une application C^∞ de $G \times X$ dans X.

Plongement [BG87], §2.6.9. Soient X et Y deux *variétés* et $f : X \to Y$ un *morphisme*. On dit que f est une plongement si elle est : injective, une *immersion* et un *homéomorphisme* de X sur son image $f(X)$.

<u>**Revêtement**</u> [BG87], §2.4.1. Soient X et Y deux *variétés* de classe C^s. Une application p de X dans Y est dite un revêtement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. p est surjective et est un *morphisme* de classe C^s de X dans Y,
2. pour tout y de Y, il existe un ouvert V de Y contenant y, tel que $p^{-1}(V)$ admette une partition de la forme $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ où les U_i sont des ouverts de X, tels que pour tout i la restriction de p à U_i soit un *difféomorphisme* de U_i sur V.

On peut également voir un revêtement comme un *espace fibré* (Y, X, p) dont les fibres sont discrètes [Pha92], §VII.2.

<u>**Section d'un espace fibré**</u> voir *espace fibré*.

<u>**Sous-variété de $\mathbb{R}^n$**</u> [BG87], §2.2.1. Soit V une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension d, de classe C^p, si pour tout x de V, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, contenant x, un difféomorphisme f de classe C^p de U sur son image $f(U)$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, tel que $f(U \cap V) = f(U) \cap \mathbb{R}^d$. L'entier n - d est alors appelé la **codimension** de V.

<u>**Submersion**</u> [BG87], §2.6.9. Soient X et Y deux *variétés* et $f : X \to Y$ un *morphisme*. On dit que f est une submersion en x si l'*application tangente* $T_x f$ est surjective. On dit que f est une submersion si la propriété est vraie pour tout x de X.

<u>**Variété**</u> [BG87], §2.2.5. Une variété (ou variété différentielle) de dimension d de classe C^p $(p \geq 1)$ est la donnée d'un ensemble X et d'une classe d'équivalence d'*atlas* d-dimensionnels de classe C^p sur X.

<u>**Variété riemanienne**</u> [Mal72] §III.8.1.2. On appelle champ de tenseurs covariants de degré 2, symétrique défini positif sur une *variété* X, la donnée, pour tout $x \in X$, d'une forme bilinéaire symétrique définie positive sur l'*espace tangent* $T_x X$.

On appelle variété riemanienne une variété munie d'un tel champ de tenseurs.

Bibliographie

[AH80] Appel (K.) et Haken (W.). – La solution du problème des quatre couleurs. *In : Les progrès des mathématiques.* – Belin, Bibliothèque Pour la Science, 1980.

[Aur90] Aurenhammer (F.). – *Voronoi diagrams: a survey of a fundamental geometric data structure.* – Rapport technique n° B-90-09, Berlin, West Germany, Fachber. Math., Free Univ. Berlin, 1990.

[Bar77] Baranger (J.). – *Introduction à l'analyse numérique*, chap. 7: Problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires. – Paris, Hermann, 1977, *Collection méthodes.*

[Bau75] Baumgart (B.G.). – A polyhedron representation for computer vision. *In : AFIPS Conference*, pp. 589–596.

[BCGH92] Barr (A.H.), Currin (B.), Gabriel (S.) et Hughes (J.F.). – Smooth interpolation of orientations with angular velocity constraints using quaternions. *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, vol. 26, n° 2, juillet 1992, pp. 313–320.

[Ber70] Berge (C.). – *Graphes et hypergraphes.* – Paris, Dunod, 1970.

[BG87] Berger (M.) et Gostiaux (B.). – *Géométrie différentielle, variétes, courbes et surfaces.* – PUF, 1987.

[Bis75] Bishop (R.L.). – There is more than one way to frame a curve. *American Mathematical Monthly*, no82, 1975, pp. 246–251.

[BN92] Beier (T.) et Neely (S.). – Feature-based image metamorphosis. *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, vol. 26, n° 2, juillet 1992, pp. 35–42.

[Boi88] Boissonnat (J.-D.). – Shape reconstruction from planar cross sections. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, vol. 44, 1988.

[Bre83] Brezis (H.). – *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* – Masson, 1983, collection mathématiques appliquées pour la maîtrise édition.

[BU89] Bethel (E.W.) et Uselton (S.P.). – Shape distortion in computer-assisted key-frame animation. *In : Computer Animation'89, State-of-the-art in Computer Animation*. Springer-Verlag, pp. 215–224. – Computer Graphics International, 1989.

[Car93] Carmo (M.P. Do). – *Riemannian geometry*. – Birkhauser, 1993.

[Cho95] Chou (J.J.). – Voronoi diagrams for planar shapes. *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 15, n° 2, mars 1995, pp. 52–59.

[CL92] Chen (X.) et Lienhardt (P.). – Modelling and programming evolutions of surfaces. *Computer graphics forum*, vol. 11, n° 5, 1992, pp. 323–341.

[CLR94] Cormen (T.), Leiserson (C.) et Rivest (R.). – *Introduction à l'algorithmique*. – Dunod, 1994.

[CNR92] CNRS (Formation permanente). – *Les Méthodes Non Standard: de la mathématique à la physique*. – Gif sur Yvette, avril 1992.

[CP89] Chen (S.E.) et Parent (R.E.). – Shape averaging and its applications to industrial design. *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 9, n° 11, janvier 1989, pp. 47–54.

[CS78] Christiansen (H.N.) et Sederberg (T.W.). – Conversion of complex contour line definitions into polygonal element mosaics. *Computer Graphics (SIGGRAPH '78)*, vol. 12, n° 3, août 1978, pp. 187–192.

[CS93] Chopp (D.L.) et Sethian (J.A.). – Flow under curvature: singularity formation, minimal. *Experimental mathematics*, vol. 2, n° 4, 1993, pp. 235–255.

[Die71a] Dieudonné (J.). – *ELEMENTS D'ANALYSE : 3 : chap. 16 et 17*. – Cahiers scientifiques, 1971.

[Die71b] Dieudonné (J.). – *ELEMENTS D'ANALYSE : 4 : chap. 18 à 20*. – Cahiers scientifiques, 1971.

[Die75] Dieudonné (J.). – *ELEMENTS D'ANALYSE : 5 : chap. 21*. – Cahiers scientifiques, 1975.

[DTG95] Desbrun (M.), Tsingos (N.) et Gascuel (M-P.). – Adaptative sampling of implicit surfaces for interactive modeling and animation. *In : Implicit Surfaces'95*, éd. par Wyvill (B.) et Gascuel (M-P.). Eurographics, pp. 171–185. – Grenoble, avril 1995.

[Ebe92] Ebel (R.). – Reconstruction interactive d'éléments anatomiques à l'aide de surfaces de forme libre. – Thèse de doctorat en sciences, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, décembre 1992.

[EPO91] Ekoule (A.), Peyrin (F.) et Odet (C.). – A triangulation algorithm for arbitrary shaped multiple planar contours. *ACM Transactions on Graphics*, vol. 10, n° 2, avril 1991, pp. 182–199.

[Fau89] Faugeras (O.). – A few steps toward artificial 3D vision. *In : Robotics science*, éd. par Brady (Michael), pp. 39–137. – MIT press, 1989.

[Fau93] Faugeras (O.). – Cartan's moving frame method and it's application to the geometry and evolution of curves in the euclidean affine and projective planes. *In : Applications of invariance in computer vision*, éd. par Mundy (J.L.), Zisserman (A.) et Forsyth (D.), pp. 11–46. – Springer-Verlag, 1993.

[FDFH90] Foley (J.D.), Dam (A. Van), Feiner (S.K.) et Hughes (J.). – *Computer graphics : principles and practice*. – Addison-Wesley, 1990, second edition édition.

[Fer88] Ferrif (B.A.). – *Méthodes mathématiques. Géométrie*. – Paris, Institut Géographique National, 1988.

[FKU77] Fusch (H.), Kedem (Z.M.) et Uselton (S.P.). – Optimal surface reconstruction from planar contours. *Communications of the ACM*, vol. 20, n° 10, octobre 1977, pp. 693–702.

[FN94] Foley (T.A.) et Nielson (G.M.). – Modeling of scattered multivariate data. *In : State of the art reports*. Eurographics'94, pp. 38–59. – Oslo, Norway, septembre 1994.

[Gas90] Gascuel (M.-P.). – Déformations de surfaces complexes: techniques de haut niveau pour la modélisation et l'animation. – Thèse de doctorat en sciences, Université de Paris-Sud, octobre 1990.

[GD95] Gelston (S.M.) et Dutta (D.). – Boundary surface recovery from skeleton curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 12, n° 1, 1995, pp. 27–51.

[Gei93] Geiger (B.). – *Three-dimensional modeling of human organs and its application to diagnosis and surgical planning*. – Rapport technique n° 2105, INRIA, novembre 1993.

[GG95] Goldstein (E.) et Gotsman (C.). – Polygon morphing using a multiresolution representation. *In : Graphic Interface'95.* – Quebec, mai 1995.

[GH94] Guibas (L.) et Hershberger (J.). – Morphing simple polygons. *In : 10th Computational geometry.* – Stony brook, NY, USA, juin 1994.

[Gra71] Gramain (A.). – *Topologie Des Surfaces.* – Collection SUP chez P.U.F, 1971.

[GS94] Grünbaum (B.) et Shepard (G.C.). – A new look at Euler's theorem for polyhedra. *American Mathematical Monthly*, février 1994, pp. 109–128.

[GV95] Gomes (J.) et Velho (L.). – Abstraction paradigms for computer graphics. *The Visual Computer*, vol. 11, n° 5, mai 1995, pp. 227–239.

[GYKD91] Goldak (J.A.), Yu (X.), Knight (A.) et Dong (L.). – Constructing discrete medial axis of 3D objects. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 1, n° 3, 1991, pp. 327–339.

[Hof89] Hoffmann (C. M.). – *Geometric and Solid Modeling: An Introduction.* – Morgan Kaufmann, 1989.

[HP84] Hafford (K.J.) et Preston (K.). – Three-dimensional skeletization of elongated solids. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 27, 1984, pp. 78–91.

[HP93] Hanotaux (G.) et Peroche (B.). – Interactive control of interpolations for animation and modeling. *In : Graphic Interface'93.* – Toronto, mai 1993.

[HP94] Hilton (P.) et Pedersen (J.). – Euler's theorem for polyhedra: a topologist and geometer respond. *American Mathematical Monthly*, décembre 1994, pp. 959–962.

[Hug92] Hughes (J.F.). – Scheduled Fourier volume morphing. *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, vol. 26, n° 2, juillet 1992, pp. 43–46.

[Hus94] Husek (M.). – Introduction to categorical shape theory, with applications in mathematical morphology. *In : Shape in picture.* NATO advanced research workshop, pp. 92–110. – Springer.

[IKSU92] Ikeda (T.), Kunii (T.L.), Shinagawa (Y.) et Ueda (M.). – A geographical database based on the homotopy model. *In : Modern geometric computing for visualization*, éd. par Kunii (T.L.) et Shinagawa (Y.). pp. 193–206. – Tokyo, Japon, 1992.

[KCM94] Karron (D.B.), Cox (J.) et Mishra (B.). – New findings from the SpiderWeb algorithm: Towards a digital Morse theory. *In : Visualization in Biomedical Computing '94*, éd. par Robb (R.A.). pp. 643–657. – Rochester, octobre 1994.

[KCP92] Kent (J.R.), Carlson (W.E.) et Parent (R.E.). – Shape transformation for polyhedral objects. *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, vol. 26, n° 2, juillet 1992, pp. 47–54.

[Ker81] Kergosien (Y.L.). – La famille des projections orthogonales d'une surface et ses singularités. *C.R.A.S, t.292, Série I*, juin 1981, pp. 929–932.

[Ker92] Kergosien (Y.L.). – Topology and visualization: from generic singularities to combinatorial shape modelling. *In : International workshop on modern geometric computing for visualization*, éd. par T.L. Kunii (Y. Shinagawa). – Tokyo, Japan, 1992.

[KKM91] Kong (Y.), Kopperman (R.) et Meyer (P.). – A topological approach to digital topology. *Amer. Math. Monthly*, vol. 98, n° 10, 1991, pp. 901–917.

[Klo86] Klok (F.). – Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory. *Computer Aided Geometric Design*, no3, 1986, pp. 217–229.

[KPC91] Kent (J.R.), Parent (R.E.) et Carlson (W.E.). – Establishing correspondences by topological merging: a new approach to 3-D shape transformation. *In : Graphic Interface'91*, pp. 271–278. – Calgary, juin 1991.

[KR91] Kaul (A.) et Rossignac (J.). – Solid-interpolating deformations: construction and animation of PIPS. *In : Eurographics'91*, pp. 493–505. – Vienna, septembre 1991.

[KST92] Kunii (T.L.), Shinagawa (Y.) et Takahashi (S.). – Algorithmic animation of constructing surfaces from cells. *In : Creating and Animating The Virtual Worl*, éd. par Thalmann (D.). pp. 191–197. – Springer.

[KTZ92] Kimia (B.B.), Tannenbaum (A.) et Zucker (S.W.). – On the evolution of curves via a function of curvature. I. The classical case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 163, 1992, pp. 438–458.

[KWT87] Kass (M.), Witkin (A.) et Terzopoulos (D.). – Snakes: Active contour models. *In : ICCV*, pp. 259–268.

[Laz95] Lazarus (F.). – *A Geometrically based approach to 3D skeleton curve blending.* – Rapport technique n° 2458, Rocquencourt, France, INRIA, janvier 1995.

[LCHS94] Lee (S.Y.), Chwa (K.Y.), Hahn (J.) et Shin (S.Y.). – Image morphing using deformable surfaces. *In : Computer Animation'94*, pp. 31–39.

[LCJ93] Lazarus (F.), Coquillart (S.) et Jancène (P.). – Interactive axial deformations. *In : Modeling in Computer Graphics.* Springer-Verlag, pp. 241–254. – Genova, juin 1993.

[LCJ94] Lazarus (F.), Coquillart (S.) et Jancène (P.). – Axial deformations: an intuitive deformation technique. *Computer-Aided Design*, vol. 26, n° 8, août 1994, pp. 607–613.

[LCSW95] Lee (S.Y.), Chwa (K.Y.), Shin (S.Y.) et Wolberg (G.). – Image metamorphosis using snakes and free-form deformations. *In : Proceedings of SIGGRAPH '95 (Los Angeles, CA).* ACM SIGGRAPH, pp. 439–448. – ACM Press.

[LFA77] Lelong-Ferrand (J.) et Arnaudies (J.M.). – *Géométrie.* – T 3, Dunod Université, 1977.

[LGL95] Lerios (A.), Garfinkle (C.) et Levoy (M.). – Feature based volume metamorphosis. *In : Proceedings of SIGGRAPH '95 (Los Angeles, CA).* ACM SIGGRAPH, pp. 449–456. – ACM Press.

[Lie93] Lienhardt (P.). – *N-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifols.* – Rapport technique n° 93/04, Strasbourg, Université Louis Pasteur, 1993.

[LL89] Leymarie (F.) et Levine (M.D.). – *Snakes and Skeletons.* – Rapport technique n° TR-CIM-89-3, McGill Research Centre for Intelligent Machines, janvier 1989.

[LV94] Lazarus (F.) et Verroust (A.). – Feature-based shape transformation for polyhedral objects. *In : Fifth Eurographics Workshop on Animation and Simulation.* – Oslo, Norway, septembre 1994.

[LV95] Lazarus (F.) et Verroust (A.). – Décomposition cylindrique de polyèdre et courbe squelette. *In : troisième journèes de l'AFIG.* – Marseille, novembre 1995.

[Mal72] Malliavin (P.). – *Géométrie Différentielle intrinsèque.* – Paris, Hermann, 1972, *Enseignement des sciences.*

[Mat88] Matheron (G.). – Exemples of topological properties of skeletons. *In : Image analysis and mathematical morphology*, éd. par Serra (J.), chap. 11, pp. 217–238. – Academic Press, 1988.

[MMP87] Mitchell (J.S.B.), Mount (D.M.) et Papadimitriou (C.H.). – The discrete geodesic problem. *SIAM J. Comput.*, vol. 16, 1987, pp. 647–668.

[MR95] Mayya (N.) et Rajan (V.T.). – An efficient shape representation scheme using voronoi skeletons. *Pattern Recognition Letters*, vol. 16, n° 2, février 1995, pp. 147–160.

[MSS92] Meyers (D.), Skinner (S.) et Sloan (K.). – Surfaces from contours. *ACM Transactions on Graphics*, vol. 11, n° 3, juillet 1992, pp. 228–258.

[MT86] Mneimné (R.) et Testard (F.). – *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, chap. 3: La fonction exponentielle. Applications. – Paris, Hermann, 1986, *Collection Méthodes.*

[OP94] Opitz (K.) et Pottmann (H.). – Computing shortest paths on polyhedra: applications in geometric modeling and scientific visualization. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 4, n° 2, 1994, pp. 165–178.

[Paj92] Pajon (J.L.). – Outils de visualisation interactifs pour l'analyse de donnees scalaires structurees : applications aux sciences de la terre. – Thèse de doctorat de l'université Paris-Sud, 1992.

[Par92] Parent (R.E.). – Shape transformation by boundary representation interpolation: a recursive approach to establishing face correspondences. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, vol. 3, 1992, pp. 219–239.

[Ped95] Pedersen (H.K.). – Decorating implicit surfaces. *In : Proceedings of SIGGRAPH '95 (LA, Californie)*, éd. par Cook (R.). pp. 291–300. – ACM Press.

[Pha92] Pham (F.). – *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés.* – Paris, InterEditions, 1992.

[PLVB94] Paouri (A.), Lazarus (F.), Verroust (A.) et Blonz (C.). – Metadata. – videotape, INRIA UCIS Audiovisuel, France, 1994.

[Pon88] Ponce (J.). – Représentation des objets tridimensionnels. – Thèse d'Etat de l'université Paris-Sud, 1988.

[Pre] Preteux (F.). – La morphologie mathématique. ses fondements: ensembliste, topologique, probabiliste. – Cours de TELECOM Paris.

[Req80] Requicha (A.A.G.). – Representations for rigid solids: Theory methods, and systems. *ACM Computing Surveys*, vol. 12, décembre 1980, pp. 437–464.

[Rév93] Réveillès (J.P.). – Ideal discrete geometry. *In : Colloque Géométrie Discrète en Imagerie: Fondements et Applications*. Université Louis Pasteur, pp. 108–134. – Strasbourg, septembre 1993.

[Ris91] Risler (J.J.). – *Méthodes mathématiques pour la CAO*. – Paris, Masson, 1991, *Recherches en Mathématiques Appliquées*.

[RK94] Rossignac (J.) et Kaul (A.). – AGRELS and BIBs: metamorphosis as a Bézier curve in the space of polyhedra. *In : Eurographics'94*, pp. C–179–C–184. – Oslo, septembre 1994.

[Ros86] Rosenfeld (A.). – Axial representation of shape. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 33, 1986, pp. 156–173.

[Rou93] Roux (J.-C.). – Curves reconstruction. *In : Second international conference on curves and surfaces*, éd. par Laurent (P.-J.), Mehaute (A. Le) et Schumaker (L.). Association francaise d'approximation. – Chamonix, juin 1993.

[Sch70] Schwartz (L.). – *Topologie générale et analyse fonctionnelle*. – Paris, Hermann, 1970, *Enseignement des sciences*, volume 2.

[Sch89] Schmitt (M.). – Des algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle. – Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris, février 1989.

[Ser82] Serra (J.). – *Image analysis and mathematical morphology*. – Academic Press, vol. 1, 1982.

[SES93] Séqueira (J.), Ebel (R.) et Schmitt (F.). – 3D-modeling of tree-like anatomical structures. *Computerized medical imaging and graphics*, vol. 17, n° 4, 1993.

[SG92] Sederberg (T.W.) et Greenwood (E.). – A physically based approach to 2-D shape blending. *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, vol. 26, n° 2, juillet 1992, pp. 25–34.

[SGWM93] Sederberg (T.W.), Gao (P.), Wang (G.) et Mu (H.). – 2D shape blending: An intrinsic solution to the vertex path problem. *Computer Graphics (SIGGRAPH'93)*, vol. 27, n° 2, août 1993, pp. 15–18.

[Sho87] Shoemake (K.). – Quaternion calculus and fast animation, computer animation: 3-D motion specification and control. *In : SIGGRAPH Course Notes*, pp. 101–121.

[SK91] Shinagawa (Y.) et Kunii (T.L.). – Constructing a Reeb graph automatically from cross sections. *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 11, n° 6, novembre 1991, pp. 44–51.

[SKK91] Shinagawa (Y.), Kunii (T.L.) et Kergosien (Y. L.). – Surface coding based on Morse theory. *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 11, n° 5, septembre 1991, pp. 66–78.

[SMa88] Serra (J.), Matheron (G.) et al. – *Image analysis and mathematical morphology.* – Academic Press, vol. 2, 1988.

[SP86] Sederberg (T.W.) et Parry (S.R.). – Free-form deformation of solid geometric models. *In : Computer Graphics (SIGGRAPH '86 Proceedings)*, pp. 151–160.

[SR95] Shapira (M.) et Rappoport (A.). – Shape blending using the star-skeleton representation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 15, n° 2, mars 1995, pp. 44–50.

[ST92] Szeliski (R.) et Tonnesen (D.). – Surface modeling with oriented particle systems. *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, vol. 26, n° 2, juillet 1992, pp. 185–194.

[ST94] Sapiro (G.) et Tannenbaum (A.). – Area and length preserving geometric invariant scale-spaces. *In : Computer Vision*, éd. par Eklundh (Jan-Olof). ECCV'94, pp. 449–458. – Springer-Verlag.

[Sut87] Sutcliffe (D.C.). – Contouring over rectangular and skewed rectangular grids - an introduction. *In : SIGGRAPH Course Notes*, pp. 69–91.

[SV90] Subirana-Vilanova (J.B.). – Curved inertia frames and the skeleton sketch: finding salient frames of reference. *In : ICCV'90*. IEEE, pp. 702–708. – Osaka, Japan, 1990.

[Ter94] Terraz (O.). – Programmation de métamorphoses d'objets surfaciques et volumiques. – Thèse de doctorat en sciences, Université Louis Pasteur, Strasbourg, septembre 1994.

[TL95] Terraz (O.) et Lienhardt (P.). – A study of basix tools for simulating metamorphoses of subdivided 2D and 3D objects. Applications to the internal growing of wood and to the simulation of the growing of fishes. *In : Eurographics Workshop on Animation and Simulation.* – Maastrich, septembre 1995.

[Uni93] Université Louis Pasteur. – *Colloque Géométrie Discrète en Imagerie: Fondements et Applications.* – Strasbourg, septembre 1993.

[Wal76] Wall (C.T.C.). – Geometric properties of generic differentiable manifolds. *In : Geometry and Topology.* – Springer Verlag, 1976.

[WH94] Witkin (A.) et Heckbert (P.). – Using particles to sample and control implicit surfaces. *In : Proceedings of SIGGRAPH '94 (Orlando, Florida, July 24–29, 1994)*, éd. par Glassner (Andrew). pp. 269–278. – ACM Press.

[Wij91] Wijk (J.J. Van). – Rendering lines on curved surfaces. *In : Eurographics Workshop on Visualization in Scientific Computing*, éd. par Grave (M.), Lous (Y. Le) et Hewitt (W.T.). pp. 113–120. – Springer Verlag, 1994.

Table des figures

1.1 À gauche : interpolation au temps 1/2 entre deux segments Γ_0 et Γ_1 du plan orientés dans le sens contraire. À droite : interpolation au temps 1/2 entre deux arcs de cercle. La courbe interpolée est un arc de cardioïde. 12
1.2 Transport du vecteur $\gamma'(s)$ en T_eX. 16
1.3 Le vecteur $\mathbf{v}_t(s)$ est transporté en tout point de X. 16

2.1 les angles α_i^n et θ_i^n (les indices n sont supprimés sur la figure). 36
2.2 Influence d'une torsion supplémentaire. 40
2.3 Influence du contrôle de la vitesse d'interpolation. Les courbes interpolées sont visualisées aux temps t = 0, 0.1, 0.2, 0.35, 0.5, 0.75, 1. 41
2.4 Redressement automatique d'une courbe 42
2.5 Interpolation par la méthode A. 44
2.6 Interpolation par la méthode Q. 45

1.1 La réunion d'un carré C unitaire et de son translaté $\mathsf{C}_{1+1/n}$, le long d'une de ces arêtes, converge dans $\mathcal{F}$ vers un rectangle lorsque la translation de longueur $1+1/n$ tend vers 1. Cependant la limite supérieure du squelette de ce $\mathsf{C} \cap \mathsf{C}_{1+1/n}$ n'est pas contenue dans le squelette du rectangle, et la limite inférieure ne contient pas le squelette du rectangle. 53
1.2 Squelette d'un parallélépipède. 55
1.3 (a) Un tore, (b) ses sections et (c) son diagramme de Reeb. 56

2.1 La fonction de Morse hauteur sur la sphère se transporte sur les formes qui lui sont difféomorphes. 59
2.2 Les barycentres des lignes de niveau fournissent une courbe qui présente un point de rebroussement à l'endroit où la calotte est enfoncée. 60
2.3 Les barycentres des composantes connexes des courbes de niveau ne forment pas un ensemble connexe. 60
2.4 Un objet qui n'est monotone par rapport à aucune direction. 61
2.5 $\mathbf{r}$ est le rayon d'injectivité du point $\mathbf{s}$. 62

3.1 Les géodésiques se déplient en segment de droite... 64
3.2 Propagation d'un intervalle d'optimalité. 65
3.3 Les faces sont complétés par toutes arêtes possibles entre leurs sommets. 66
3.4 Un découpage en parties cylindriques. Les points noirs représentent des ensembles critiques qui doivent être ôtés. 67
3.5 Les voisins du sommet s. 69
3.6 Les lignes de champ sur un triangle. La configuration représentée a toujours lieu : une arête a une orientation opposée aux deux autres, plus généralement il n'existe aucun cycle d'arêtes d'orientations compatibles sur le polyèdre. 70
3.7 L'indice du sommet s est nul. 70
3.8 La ligne de niveau traverse les arêtes tracées en trait gras. 71
3.9 Les trois possibilités de raccord des lignes de niveau dans un rectangle dégénéré. 72
3.10 À gauche : interpolation linéaire des courbes de niveau. À droite : l'interpolation spline peut générer des incohérences. 72
3.11 À gauche : la configuration générale. À droite : le cas orienté. 74
3.12 Deux exemples de modifications de contour au voisinage d'un sommet s. Les "+" (resp. "-") symbolisent des sommets de couleurs supérieures (resp. inférieures) à $c(s)$. La courbe en trait pointillé (resp. plein) représente la ligne de niveau inférieure (resp. supérieure) à $c(s)$. 75
3.13 À droite : le sommet σ_2 de couleur $c(s_i)$ d'indice nul. À gauche : le graphe des arêtes correspondantes. $\mathcal{C}_i$ contient la chaîne (a_1, a_2, a_3, a_4) qui est remplaçée par $(a_1, a_5, a_6, a_7, a_8, a_4)$ dans $\mathcal{C}_{i+1}$. 76
3.14 Une bande cylindrique entre deux niveaux $c(s_i)$ et $c(s_{i+1})$. 78
3.15 L'arête de sortie (resp. d'entrée) a_s (resp. a_e) est alors la première arête rencontrée transverse à c_0... 78
3.16 Les voisins de s_i ont une couleur inférieure à $c(s_i)$. 81
3.17 $\mathcal{C}^j$ entoure $\mathcal{C}^i$ qui entoure σ et $\mathcal{C}^i$ entoure $\mathcal{C}^j$ qui entoure s ! 82
3.18 Au dessus : la ligne de niveau légèrement inférieur à $c(s_i)$. En dessous :en trait plein, la ligne de niveau légèrement supérieur à $c(s_i)$. L'indice du sommet vaut -1 et il y a 1 création de cycle. 83
3.19 Les arêtes en pointillés se substituent aux arêtes en trait plein et gras et le cycle est coupé à cet endroit. 84
3.20 À gauche : la structure d'arête ailée pour un polyèdre orientable. À droite : le cas d'une triangulation. 85
3.21 Un cône tronqué par un plan oblique et tel que $d(s_i) < d(s_{i+1})$. 87
3.22 Trois courbes de niveau. Le petit triangle indique le point source. 88

3.23 Le long de la géodésique d'un maximum local s_M on rencontre une face qui contient une arête du contour cherché. 89
3.24 L'orientation de a et de $\mathcal{P}$ permet de distinguer une face f_s et f_e. 89
3.25 Un cygne, son axe et 20 courbes de niveau. 91
3.26 À gauche : les flèches noires et blanches désignent les deux points sources utilisés pour le calcul de l'axe. Au milieu : les deux axes correspondant sont représentés sur la même figure. À droite : un détail de la figure du milieu. 92
3.27 Deux calculs d'axe. 92
3.28 À gauche : une vue de face de l'objet et l'axe calculé en trait épais. Au milieu : une vue latérale de l'objet. À droite : la même vue de l'axe. 93
3.29 Autres exemples de calcul d'axe. 93
3.30 À gauche : la condition d'étoilement se traduit par $\langle \gamma(s)p, \mathbf{n}_p \rangle > 0$. À droite : la condition de régularité du paramétrage se traduit par la position de $\mathcal{C}(s)$ par rapport à la binormale translatée au centre de courbure. 94

1.1 Le graphe associé à une image. Une seule composante de la couleur est représentée. 104
1.2 Les traits caractéristiques sont constitués de deux segments. Les déformations W_0 et W_1 ne sont pas nécessairement inverses l'une de l'autre. 105
1.3 Différents types de faces dans la somme de Minkowski de deux polyèdres A et B (figure extraite de [KR91]). 108
1.4 La mise en correspondance de deux contours P et Q peut être représentée par un graphe torique. Chaque point de ce graphe représente une arête de liaison entre les deux contours. 109
1.5 Deux décompositions compatibles de polygones. Les points • représentent les sommets des polygones, les points carrés et noirs représentent les centres d'étoilement des sous-parties et les points □ représentent les milieux des arêtes d'adjacences entre deux sous-parties. Le point 8 est la racine de l'arbre associé aux sous-parties (figure extraite de [SR95].) 111
1.6 Subdivision récursive d'un tétraèdre et d'un cube. Seule la moitié de l'arbre de subdivision est montrée (figure extraite de [Par92]). 113
1.7 Principe (en deux dimensions) de l'interpolation entre un triangle et un carré. . . 114

2.1 Un axe permet de décomposer un objet en trois parties. 118
2.2 Le point p est projeté orthogonalement sur γ. 119
2.3 Le point p peut être projeté comme sur les deux figures, mais seul l'attachement de la figure de gauche peut aboutir à un attachement global de l'objet. 120
2.4 La fonction d'attachement est discontinue au niveau des points noirs. Une déformation de l'axe produit un objet discontinu. 120

2.5 Le dièdre D_i. 121
2.6 Report du système de coordonnées du plan Π_i dans le plan Π_{i+1}. 122
2.7 Le point p doit être attaché différemment selon l'objet auquel il appartient. . . . 123
2.8 L'objet gris peut être attaché aussi bien sur la portion d'axe comprise entre s_1 et s_2 qu'entre celle comprise entre s_3 et s_4. 123
2.9 Le sommet p est attaché en progressant le long de Γ à partir du point Γ_i. 124
2.10 Les parties grisées de l'objet en trait épais sont attachées aux extrémités de l'axe γ. 125
2.11 La face $F = ABCD$ est projetée dans l'espace des paramètres. Les échantillons intérieurs sont calculés par balayage à l'aide des plans de coupe. 129
2.12 On détermine les échantillons dans l'intersection ab de la face F avec le plan de coupe Π_i. 129
2.13 On détermine les échantillons dans l'intersection ab de la face F avec le quart de plan de coupe associé à l'angle θ_i. 130
2.14 Un objet ouvert au niveau de la calotte supérieure. Les échantillons trouvés dans les cartes correspondent à la partie grise des cartes. 130
2.15 Les échantillons de paramètres $\phi_i = \frac{\pi}{2}$ sont identifiés. 131
2.16 Les secteurs angulaires associés aux faces F_1 et F_2 sont figurés par des zones hachurées. 132
2.17 À gauche : un cube et son axe. Au milieu : le cube échantillonné avec la procédure précédente. À droite : le maillage recalé. 133
2.18 À gauche : l'angle α entre les normales des deux faces incidentes à une arête permet de déterminer si cette arête est vive. À droite : l'angle α maximal entre les normales des faces incidente à un sommet permet de le sélectionner comme sommet conique. 133
2.19 La zone de déplacement associée à un échantillon $p_{i,j}$ dans l'espace des paramètres. 134
2.20 Le point $q_{i,j}$ est l'intersection de la droite support de $\mathcal{A}$ et de la droite déterminée par les deux plans orthogonaux passant par l'extrémité de l'axe et contenant respectivement l'arête $\mathcal{A}$ et le point $p_{i,j}$. 135
2.21 La courbe noire représente la projection d'une arête dans l'espace des paramètres. Les points blancs sont les échantillons à déplacer et leur zone de déplacement est représentée par des rectangles gris. Les droites horizontales en pointillés indiquent les plans de coupe intermédiaires, tandis que les points noirs sont les intersections de ces plans avec l'arête considérée (et les extrémités de l'arête). Sur la figure de droite on montre le maillage déformé et les diagonales ajoutées sont indiquées en trait épais. 136
2.22 Un sommet $p_{i,j}$ du maillage recalé peut avoir huit voisins si des diagonales ont été ajoutées dans chacune des mailles incidentes. 137

2.23 Le surmaillage est obtenu par superposition des grilles de chaque objet recalé. . . 138
2.24 Paramétrisation de la partie cylindrique et des calottes. 140
2.25 La figure représente une coupe des objets par un plan vertical passant par l'axe. Les points en correspondance sur le bord doivent avoir des tangentes parallèles pour obtenir une interpolation régulière. 140
2.26 Transformation entre deux cônes tronqués. Les axes sont identiques et visualisés en traits épais. Les objets sont représentés aux instants 0, 1/2 et 1. Le grand rectangle indique le niveau de raccord entre la partie cylindrique et les calottes. . 141
2.27 Transformation entre deux cônes tronqués. Les angles entre les plans tangents aux deux cônes sont plus importants que sur la figure 2.26. 141
2.28 Le même axe est utilisé pour échantillonner les deux objets clefs. 142
2.29 L'axe initial et l'axe final sont échangés entre la transformation de la rangée du haut et celle de la rangée du bas. 142
2.30 Un rendu simple de la figure 2.29. 143
2.31 Les formes de la rangée du milieu sont interpolées entre les formes du haut et du bas. 143
2.32 Transformation d'une calotte sphérique en sphère. 144
2.33 Un rendu de la figure 2.32. 144
2.34 Transformation d'une faucille en poisson. 145
2.35 Deux métamorphoses extraites du film Metadata. 146
2.36 Deux métamorphoses extraites du film Metadata. 146

C.1 Une carte autour d'une rotation R_0. 156

E.1 Les fermés F_1 et F_2 sont dans l'ouvert $\mathcal{F}_K^{G_1,G_2}$ défini par les ouverts G_1 et G_2 et le compact K. 164

F.1 H est un champ tangent aux branches d'hyperboles $x^2 - y^2 = k^2$. 168
F.2 Changement de coordonnées projectives. 169
F.3 Le champ se prolonge continûment sur les bords de Δ... 170
F.4 À gauche : le profil de h. À droite : le graphe de h_2. 170
F.5 Le champ H_2. 171