Chapitre 5

Homologie et approximation

Soit X un sous-espace fermé d'un espace métrique (M, d) (On pourra prendre $M = \mathbb{R}^n$). Connaissant une approximation Y de X on souhaite extrapoler la topologie de X. Robins [Rob99] a montré comment déduire en pratique l'homologie de X à partir de voisinages tubulaires de Y. Par définition l'ϵ-voisinage tubulaire de Y est

$$Y^\epsilon = \{x \in M \ : \ d(x, Y) \leq \epsilon\}$$

Le principe développé par Robins est le suivant. Si Y est suffisamment proche de X pour la distance de Hausdorff alors un petit voisinage tubulaire de Y se trouve emboîtés entre deux petits voisinages tubulaires de X et réciproquement. Pour peu que X soit suffisament régulier, les petits voisinages tubulaires de X ont la même homologie et un simple calcul algébrique montre que cette homologie peut s'exprimer en fonction des homologies des voisinages tubulaires de Y. Notons que des arguments et conclusions similaires ont été obtenus par Cohen-Steiner et al. [CSEH07] et Chazal et Lieutier [CL05]. Ce dernier travail, spécifique aux sous-espaces de $M = \mathbb{R}^n$, montre également comment déduire le groupe fondamental de (petits voisinages tubulaires) de X à partir de voisinages tubulaires de Y.

Dans la suite on note $d_X : y \in M \mapsto d(y, X) = \inf_{x \in X} d(y, x)$ la fonction distance au sous-espace X et $X^\epsilon = d_X^{-1}([0, \epsilon])$ le ϵ-voisinage de X.

Définition 5.0.5 *Un réel positif a est dit* valeur régulière homologique *de d_X s'il existe ϵ positif tel que l'inclusion $j : X^{a-\epsilon} \hookrightarrow X^{a+\epsilon}$ induit un isomorphisme en homologie, i.e. $j_* : H_k(X^{a-\epsilon}) \to H_k(X^{a+\epsilon})$ est un isomorphisme pour tout k.*

Dans le cas contraire a est dit valeur critique homologique.

*On définit $hfs(X)$ (*homological feature size*) comme l'infimum des valeurs critiques homologiques non-nulles de d_X.*

On note d_H la distance de Hausdorff :

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} d_Y(x), \sup_{y \in Y} d_X(y)\}$$

Exercice 5.0.6 *Montrer que*

$$d_H(X,Y) = \inf\{\epsilon \geq 0 : Y \subset X^\epsilon \text{ et } X \subset Y^\epsilon\}$$

Lemme 5.0.7 *Pour tout $\epsilon \geq 0$, on a $X^\epsilon \subset Y^{\epsilon + d_H(X,Y)}$.*

Preuve : Soit $z \in X^\epsilon$, alors

$$\forall x \in X : d(z,Y) \leq d(z,x) + d(x,Y) \leq d(z,x) + d_H(X,Y)$$

On en déduit $d(z,Y) \leq \epsilon + d_H(X,Y)$ par passage à l'infimum du membre de droite. D'où $z \in Y^{\epsilon + d_H(X,Y)}$. $\square$

remarquons que les rôles de X et Y peuvent être interchangés.

On peut désormais énoncé le résultat principal (appelé théorème d'inférence homologique dans [CSEH07])

Théorème 5.0.8 *Soit X et Y deux sous-espaces d'un espace métrique (M,d) tels que $hfs(X) > 0$ et $d_H(X,Y) < hfs(X)/4$.*
Alors, pour tous nombres positifs ϵ, δ tels que $d_H(X,Y) + \epsilon \leq \delta < hfs(X)/4$,
l'homologie de X^ϵ (en toutes dimensions) est isomorphe à l'image du morphisme induit en homologie par l'inclusion $Y^\delta \subset Y^{3\delta}$.

La proposition mentionne le voisinage tubulaire X^ϵ et non X lui-même. Pour de nombreux espaces (sous-variétés compactes et lisses de $\mathbb{R}^n$, complexes affines finis plongés dans $\mathbb{R}^n$,...) X^ϵ se rétracte par déformation sur X. Par suite X^ϵ et X ont la même homologie (et même type d'homotopie). Chazal et Lieutier [CL05] donnent cependant un exemple d'un sous-espace compacte X du plan avec $hfs(X) > 0$ pour lequel X et X^ϵ n'ont pas la même homologie : l'espace X, parfois appelé la sinusoide fermée du topologue, est obtenu en recollant le graphe de la fonction $\sin \frac{1}{x} :]0, \frac{2}{3\pi}] \to \mathbb{R}$ avec la courbe polygonale joignant les points $(0,1), (0,-2), (\frac{2}{3\pi}, -2)$ et $(\frac{2}{3\pi}, -1)$. Alors X^ϵ a le type d'homotopie d'un cercle (épaissi) alors que X est contractile. Sur ce sujet on pourra également consulter la notion d'espace ANR (Absolute Neighborhood Retract) (cf. [GH81]).

La preuve du théorème repose sur un petit lemme préparatoire. La démonstration facile est laissée au lecteur.

Lemme 5.0.9 *Soit une chaîne de morphismes*

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} E$$

telle que $b \circ a$ et $d \circ c$ sont des isomorphismes. Alors A est isomorphe à l'image de $c \circ b$.

Preuve du théorème : Par hypothèse sur ϵ et δ et compte tenu du lemme 5.0.7, on a la suite d'inclusions

$$X^\epsilon \subset Y^\delta \subset X^{2\delta} \subset Y^{3\delta} \subset X^{4\delta}$$

Puisque $4\delta < hfs(X)$, les inclusions $X^\epsilon \subset X^{2\delta} \subset X^{4\delta}$ induisent des isomorphismes en homologie et on conclut avec le lemme précédent après passage aux morphismes induits en homologie. $\square$