Chapitre 9

Arrangements

9.1 Introduction : problème de la discrépance

On se donne un ensemble fini $\mathcal{P}$ de points dans le carré unité et on compare la mesure de l'intersection d'un demi-plan avec le carré avec la proportion de points de $\mathcal{P}$ contenu dans cette intersection. On cherche à évaluer la *discrépance*, c'est-à-dire le maximum de la différence entre ces valeurs pour tous les demi-plans possibles. Ce maximum est obtenu avec une droite qui passe soit par au moins deux points de $\mathcal{P}$ soit par un seul point mais pour des positions extrêmes de la droite, dues à la forme du carré.

On traite explicitement ces derniers cas en temps $O(n^2)$: pour chaque point de $\mathcal{P}$ on calcule les positions des droites passant par ce point et coupant le carré en deux de manière extrême (des extremums locaux pour l'aire délimitée par les droites). Chaque position extrême se calcule en temps constant et on obtient la proportion de points de $\mathcal{P}$ de chaque côté de la droite obtenue en temps $O(n)$ par simple test d'inclusion sur chaque point. Puisque les positions extrêmes sont en nombre borné pour chaque point de $\mathcal{P}$ on obtient la discrépance en temps $O(n^2)$ pour l'ensemble de ces situations extrêmes.

Le traitement des $\binom{n}{2}$ droites passant par deux points de $\mathcal{P}$ peut se faire simplement en calculant les proportions associées en temps $O(n)$ par droite. Ceci fournit trivialement un algorithme de complexité $O(n^3)$ pour le calcul de la discrépance. L'utilisation des arrangements de droites permet cependant de concevoir un algorithme plus efficace. On note pour cela que les points duaux des droites passant par deux points de $\mathcal{P}$ sont des sommets de l'arrangement des droites duales de $\mathcal{P}$. Le nombre de points de $\mathcal{P}$ au dessus/dessous d'une droite d est le nombre de droites duales de ces points au dessous/dessus du point dual de d. Pour calculer ces nombres, on construit explicitement la carte de l'arrangement dual de $\mathcal{P}$ et on marche le long de chaque droite à partir d'une extrémité. Il est facile de maintenir pour chaque sommet rencontré au cours de cette marche son *niveau*, qui est le nombre de droites duales (des points de $\mathcal{P}$) strictement au dessus de ce sommet. Le calcul des niveaux, et donc de la discrépance, s'obtient ainsi en temps proportionnel à la taille $O(n^2)$ de l'arrangement.

9.2 Préliminaire : subdivision du plan

Une *k-cellule* du plan est un sous-espace du plan homéomorphe à une k-boule ouverte. Une *subdivision du plan* est un ensemble fini de cellules disjointes de dimension 0, 1 et 2 du plan dont l'union est le plan de sorte que la frontière d'une cellule est une union de cellules de dimensions inférieures. Dans la pratique on considère souvent que le plan est compactifié par l'ajout d'un point "à l'infini" de sorte que la subdivision porte véritablement sur la sphère et non sur le plan. On pourra également consulter le chapitre 2 de ces notes sur ce point.

Un graphe est planaire s'il peut être plongé dans le plan. Un graphe plan – ou carte planaire – est un graphe plongé dans le plan. Tout graphe plan connexe induit une subdivision du plan dont les *faces* sont les composantes bornées du complémentaire du graphe.

Théorème 9.1 (Relation d'Euler) *Tout graphe plan connexe ayant s sommets, a arêtes et f faces vérifie : $s - a + f = 1$.*

Preuve : Par récurrence sur le nombre d'arêtes. Trivial si $a = 1$. Si le graphe contient un cycle, alors on ôte une arête de ce cycle qui borde deux faces distinctes (par le théorème de séparation Jordan). L'hypothèse de récurrence s'applique donc avec une face et une arête en moins. Sinon le graphe est sans cycle et contient un sommet de degré un. En ôtant ce sommet et l'arête incidente on peut à nouveau appliquer l'hypothèse de récurrence avec un sommet et une arête en moins. □

Note : généralement on considère la relation d'Euler pour un graphe tracé sur la sphère. On passe du plan à la sphère via une projection stéréographique. La face non-bornée du plan devient une face pour la sphère d'où la relation d'Euler pour la sphère : $s-a+f = 2$.

Soit $\pi : G \to \mathbb{R}^2$ un plongement polygonal d'un graphe planaire G (les plongements des arêtes sont donc des arcs polygonaux). On définit pour chaque sommet s du graphe un ordre circulaire sur les arêtes $a_1, \ldots, a_k$ incidentes à ce sommet par l'ordre circulaire dans le sens indirecte autour de $\pi(s)$ des segments de $\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)$ incidents à $\pi(s)$. Si le plongement n'est pas polygonal on peut encore définir un ordre circulaire autour de chaque sommet via un homéomorphisme du plan qui transforme les arcs intérieurs à un petit disque centré en $\pi(s)$ en des arcs polygonaux tout en laissant fixe l'extérieur du disque. On montre [MT01, p. 88] que cet ordre est indépendant de l'homéomorphisme employé. La donnée *combinatoire* du graphe G avec ces ordres circulaires est appelé une *carte combinatoire* ou *système de rotations*.

On montre [MT01, cor. 3.2.5] qu'une carte combinatoire détermine un unique plongement de G à homéomorphisme près. Dit autrement, si $\pi_1, \pi_2 : G \to \mathbb{R}^2$ sont deux plongements de G qui induisent la même carte combinatoire alors il existe un homéomorphisme ϕ du plan tel que $\pi_2 = \phi \circ \pi_1$. Dans la pratique on représente souvent une carte combinatoire à l'aide d'une liste de *demi-arêtes* représentant chacune une des deux orientations possibles de chaque arête du graphe. À chaque demi-arête a on adjoint deux pointeurs *inv* et *rot* respectivement vers la demi-arête d'orientation opposée et vers la demi-arête suivant a

dans le sens indirecte autour du sommet origine de a. Notons que la demi-arête suivant a dans la face située à gauche de a (en regardant de l'origine vers la pointe de la demi-arête) s'obtient en suivant le pointeur *inv* puis *rot*. La structure porte souvent le nom de DCEL pour Doubly-Connected Edge List. Une telle structure peut être définie pour un plongement dans la sphère et plus généralement dans une surface orientable de genre quelconque.

Références :

- [MT01]
- Primitives for the manipulation of three-dimensional subdivisions. L. Guibas and J. Stolfi, ACM Transactions on Graphics, 1985, 4(2), pp 74-123.

9.3 Arrangement de droites

Définition 9.2 *Un* arrangement *d'un ensemble de droites du plan est la décomposition du plan induite par ces droites. Les 2-faces ou cellules de cet arrangement sont les composantes connexes du complémentaire des droites, les 1-faces et 0-faces sont les faces des fermetures de ces cellules. Un arrangement est* simple *si deux droites se coupent toujours mais trois droites ont une intersection vide.*

Théorème 9.3 *Un arrangement de n droites a au plus $\binom{n}{2}$ sommets, n^2 arêtes et $\binom{n}{2} + n + 1$ faces.*

Preuve : Ces bornes sont exactes pour un arrangement simple : chaque paire de droites s'intersecte en un sommet et chaque droite est coupée en n segments par les $n-1$ autres droites. Par la relation d'Euler, obtenue sur la sphère en ajoutant un sommet à l'infini au plan, on obtient le nombre de faces. On peut se passer de la relation d'Euler en utilisant un balayage par une droite non parallèle à celle de l'arrangement. Le nombre de faces à gauche de cette droite passe de 0, à l'extrême gauche, au nombre de sommets, une fois à droite du dernier sommet de l'arrangement, auquel on doit ajouter $n+1$ faces à l'extrême droite. Ces égalités deviennent des majorations dans le cas d'un arrangement quelconque. En effet, en perturbant de manière infinitésimale un arrangement non simple $\mathcal{A}$ on peut obtenir un arrangement simple $\mathcal{A}'$ dont le nombre de faces majore celui de $\mathcal{A}$ en toute dimension. Pour cela, il suffit de déplacer chaque droite une à une dans un "voisinage tubulaire", ne contenant aucun autre sommet de l'arrangement que ceux sur cette droite, de sorte que tous les sommets sur cette droite deviennent simples et que cette droite ne soit parallèle à aucune autre. Chaque droite avant perturbation étant coupée au plus $n-1$ fois, le nombre de segments de $\mathcal{A}'$ majore celui de $\mathcal{A}$. De même pour le nombre de sommets, puisque chaque paire de droites définie au plus un sommet. Pour obtenir une majoration du nombre de facettes on peut associer à chaque facette de $\mathcal{A}$ un point intérieur. Ces points restent intérieurs au complémentaire des droites après perturbation (suffisamment petite pour cela) et restent dans des composantes connexes distinctes car tout segment joignant deux de ces points coupe une droite de l'arrangement avant et après perturbation. □

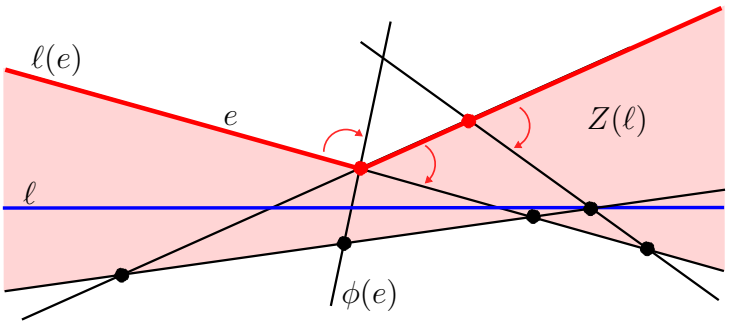

FIGURE 9.1 – La zone de la droite ℓ. L'ensemble E correspondant est constitué des 3 arêtes en trait (rouge) épais.

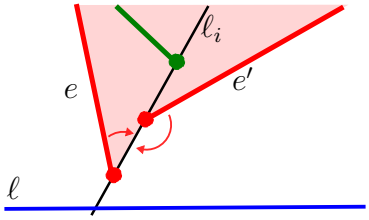

FIGURE 9.2 – La région diédrale supérieure entre ℓ_i et la droite support de e est strictement au dessus de ℓ. Comme $e' \in Z(\ell)$, il suit que ℓ_i sépare e' et e. Une troisième arête (en vert) incidente à ℓ_i et au dessus de e et e' est nécessairement hors de la zone $Z(\ell)$.

Définition 9.4 *La* zone *d'une droite dans un arrangement est l'union des faces de l'arrangement dont la fermeture intersecte cette droite, et des bords de ces faces. La* complexité *de cette zone est le nombre total de faces, arêtes et sommets qu'elle contient.*

Théorème 9.5 (de la zone) *Le nombre d'arêtes de la zone d'une droite dans un arrangement de n droites du plan est majoré par $6n$.*

Preuve 1 : Soient $L = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$ les n droites d'un arrangement et ℓ une autre droite dont la direction est dite horizontale (pente nulle). On considère l'ensemble E des arêtes de la zone $Z(\ell)$ de ℓ dont la fermeture est strictement au dessus de ℓ. On associe à toute arête e non-horizontale de E la droite $\phi(e) \in L$ qui suit la droite support $\ell(e)$ de e en tournant dans le sens indirect autour de l'extrémité inférieure de e (cf. figure 9.1). Si e est horizontale et bornée à gauche, on définit $\phi(e)$ comme la droite qui suit $\ell(e)$ en tournant dans le sens indirect autour de l'extrémité gauche de e. Notons que $\phi(e)$ ne peut être horizontale car e serait alors hors $Z(\ell)$. Montrons que pour toute $\ell_i \in L$ on a $|\phi^{-1}(\ell_i)| \leq 2$. Dans le contraire on note e et e' les deux arêtes de $\phi^{-1}(\ell_i)$ (dont les extrémités sur ℓ_i sont) les plus basses. Les deux dièdres "supérieurs" définis par ℓ_i et $\ell(e)$ d'une part et par ℓ_i et $\ell(e')$ d'autre part sont de part et d'autre de ℓ_i et au dessus de ℓ (cf. figure 9.2). Leur intérieur est donc disjoints de $Z(\ell)$. Les autres arêtes de $\phi^{-1}(\ell_i)$ sont contenues dans l'intérieur de ces dièdres et ne sont donc pas incidentes à une face de $Z(\ell)$, une contradiction. On déduit de ce qui précède $|E| \leq 2n$. (S'il y a une droite horizontale alors $|E| \leq 2(n-1)+1$).

Le nombre d'arêtes supérieures ou inférieures de la zone et non-incidentes à ℓ est donc

majoré par $4n$. Par ailleurs, le nombre maximal d'arêtes de $Z(\ell)$ incidentes à ℓ est majoré par $2n$ puisque chaque droite de L est le support d'au plus deux telles arêtes. □

La preuve qui suit permet de majorer par $8n-4$ le nombre de couples (e, f) où e est une arête incidente à une face f de la zone.

Preuve 2 : Avec les notations de la preuve 1, on oriente les ℓ_i non horizontales vers le bas et les autres vers la droite. On considère ensuite une droite ℓ' infinitésimalement translatée au dessus de ℓ. Cette droite coupe les faces dont la fermeture intersecte ℓ et situées (partiellement) au dessus de ℓ selon une suite ordonnée de gauche à droite. Pour chacune de ces faces on écrit la chaîne des droites supports de ses arêtes situées au dessus de ℓ dans un parcours dans le sens indirecte du bord de la face, en commençant par une arête incidente à ℓ. On ajoute par ailleurs un signe + (resp. -) à chaque droite support selon son sens de parcours. La concaténation de gauche à droite de ces listes fournit un mot sur les symboles $\pm\ell_i$. On scinde ce mot en deux sous-mots L_+ et L_- selon les signes des symboles.

Remarque : Une arête a non horizontale (resp. horizontale) de L_+ a sa face $f(a)$ à gauche (resp. en dessous) de sa droite support $l(a)$ en raison du sens de parcours des faces. Par conséquent toutes les faces à gauche de $f(a)$ (relativement à ℓ') sont également à gauche de $\ell(a)$.

Les sous-mots L_+ et L_- vérifient les propriétés suivantes :
- ils ne contiennent pas de facteur $\ell_i\ell_i$ car deux arêtes portées par les mêmes droites appartiennent à des faces distinctes séparées par un chemin joignant ℓ_i à ℓ. Le dernier segment de ce chemin est porté par une droite $\ell_j \neq \ell_i$ et est parcouru dans les deux sens. Autrement dit pour toute double occurrence de ℓ_i dans L_+ ou L_- il existe un ℓ_j qui les sépare.
- ils ne contiennent pas de sous mot de la forme $\ell_i\ell_j\ell_i\ell_j$. Supposons que $\ell_i\ell_j\ell_i$ est sous-mot de L_+. Soient a_g, b et a_d les segments correspondant respectifs. On forme un cycle avec la chaîne gauche c_g (resp. droite c_d) de $f(a_g)$ (resp. $f(a_d)$) comprise entre ℓ et ℓ_i et les segments des droites ℓ et ℓ_i joignant $f(a_g)$ et $f(a_d)$. Ce cycle est convexe donc simple. b rencontre l'intérieur de cette région de part sa position dans L_+. ℓ_j ne rencontrant aucune des deux chaînes c_g et c_d rencontre ℓ_i entre a_g et a_d (ainsi que ℓ (Jordan again)). On en déduit que a_d est à droite de ℓ_j (qui ne peut être horizontale). La remarque précédente montre qu'une nouvelle occurrence de ℓ_j dans L_+ impliquerait que a_d est à gauche de ℓ_j, une contradiction.

De tels mots sont appelés (n,2)-suites de Davenport-Shinzel. Ce sont précisément des mots formés sur une alphabet à n lettres, ne comportant pas de facteur aa ni de sous-mot $abab$. Le lemme suivant permet de conclure. □

Lemme 9.6 *Une (n,2)-suite de Davenport-Shinzel est de longueur au plus* $2n-1$.

Preuve : Soit S une $(n, 2)$-suite de Davenport-Shinzel. Le lemme est trivial si chaque lettre n'apparaît qu'une fois. Sinon on considère le plus petit facteur S' de S séparé par deux occurrences d'un même lettre de sorte que $S = S_1aS'aS_2$. En posant $k = |S'|$, on vérifie que S_1aS_2 est une $(n-k, 2)$-suite de Davenport-Shinzel. On conclut par récurrence sur n que $|S| \leq 2(n-k) - 1 + k + 1 \leq 2n - 1$. □

Corollaire 9.7 *La complexité de la zone d'une droite dans un arrangement de n droites du plan est linéaire (i.e. en $O(n)$).*

Preuve : Le théorème précédent borne le nombre d'arêtes de la zone. Le nombre de faces est par ailleurs majoré par $2n$ (exercice !) et le nombre de sommets est borné par le nombre d'arêtes de la zone. □

Exercice 9.8 *Montrer que le nombre de faces de la zone est bien majoré par $2n$ et donner un exemple où cette borne est atteinte.*

On construit incrémentalement la carte d'un arrangement en introduisant chaque droite une à une dans la carte déjà construite. Initialement, on introduit une première droite en ajoutant un sommet à l'infini p_∞ à la carte qui représente donc une sphère (le plan compactifié). Chaque droite introduite est donc doublement incidente à ce sommet. Pour introduire une nouvelle droite ℓ, on l'oriente et on part de la face ayant deux arêtes incidentes à p_∞ dont les deux vecteurs directeurs (issus de p_∞) encadrent celui de ℓ. On marche dans cette face jusqu'à trouver la sortie – une arête ou un sommet coupé par ℓ – et on modifie la carte en conséquence. On poursuit avec la face suivante : si on sort par l'intérieur d'une arête alors la face suivante est bien définie. Sinon il faut tourner autour du sommet de sortie pour la trouver. Voir la figure 9.3. La complexité d'insertion d'une

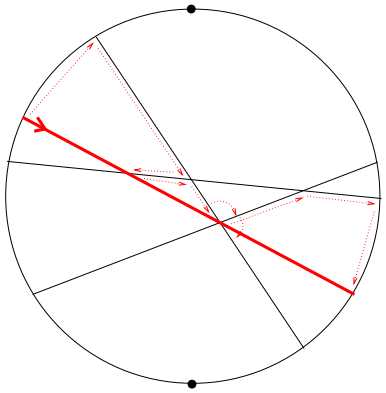

FIGURE 9.3 – La droite épaisse est introduite en partant de son point infini à gauche. Le cercle représente un éclatement du point à l'infini.

droite est proportionnelle à la complexité de sa zone dans l'arrangement déjà construit. Compte tenu du théorème 9.5 on en déduit :

Proposition 9.9 *L'arrangement de n droites dans le plan peut être calculé en temps optimal $O(n^2)$.*

9.4 Arrangement d'hyperplans

Soit H un ensemble de n hyperplans dans E^d.

Définition 9.10 *L'arrangement $\mathcal{A}(H)$ de H est la subdivision de E^d en polyèdres convexes induite par H.*

Définition 9.11 *un* k-flat *est un sous-espace affine de dimension k. C'est encore l'enveloppe affine de $k+1$ points affinement indépendants. Il est* vertical *s'il contient la direction verticale (par convention, cela désigne la dernière direction de la base canonique).*

Si un hyperplan est non vertical on peut donc parler des demi-espaces *dessous* et *dessus* cet hyperplan.

Étant donné un arrangement d'hyperplans non verticaux $H = \{h_i\}_{1\leq i\leq n}$, on associe à chaque point p de E^d un *vecteur position* dans $\{-,0,+\}^n$ dont la $i$ème composante indique si p est dessous, sur ou dessus h_i. On note h_i^+ et h_i^- les demi-espaces ouverts respectivement au dessus et au dessus de h_i et on pose $h_i^0 = h_i$. Ainsi, un point p a vecteur position $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_d)$ si et seulement si $p \in \cap_i h_i^{\epsilon_i}$.

On définit les *faces* de $\mathcal{A}(H)$ comme les composantes connexes du complémentaire de $\cup_i h_i$ dans $\mathbb{R}^d$ auxquelles on ajoute récursivement les faces des arrangements induits dans chaque h_i par les intersections de h_i avec les hyperplans de $H\setminus\{h_i\}$. On vérifie que deux points d'une même face de $\mathcal{A}(H)$ ont même vecteur position et que ce vecteur position définit de manière univoque cette face. Notons cependant que tout vecteur position de $\{-,0,+\}^n$ ne correspond pas nécessairement à une face de l'arrangement. Le vecteur position d'une sous-face d'une face est obtenu en annulant certaines des composantes du vecteur position de la face. Une *k-face* est une face de dimension k, c'est-à-dire dont l'enveloppe affine est un k-flat. Ainsi, une 0-face est un sommet et une 1-face est une arête. Une d-face est encore appelée une *cellule* et une $(d-1)$-face, une *facette*.

Un arrangement est *simple* si l'intersection de d hyperplans quelconques de l'arrangement est toujours réduite à un point tandis que l'intersection de $d+1$ hyperplans est toujours vide. S'il y a strictement moins de d hyperplans on demande que leur intersection soit un $(d-n)$-flat. De manière équivalente un arrangement est simple si toute face de codimension k est incluse dans exactement k hyperplans, i.e. a exactement k zéros dans son vecteur position et si les directions (orthogonales) de toute famille d'au plus d hyperplans forment une famille libre. En particulier une sous-face d'une face a exactement un zéro de plus dans son vecteur position.

9.4.1 Dénombrement des faces et incidences

On note $f_k(H)$ le nombre de k-faces de l'arrangement H et $i_k(H)$ le nombre d'incidences entre les k-faces et les $(k+1)$-faces de H. On note également $f_k^d(n)$ et $i_k^d(n)$ le maximum de ces nombres sur tous les arrangements de n hyperplans dans E^d.

Lemme 9.12 *Pour tout arrangement simple H de $n \leq d$ hyperplans dans E^d on a :*

$$f_k(H) = \binom{n}{d-k} 2^{n-d+k} \text{ et } i_k(H) = 2(d-k)f_k(H)$$

De plus chaque cellule de H est incidente à $\binom{n}{d-k}$ k-faces.

Preuve : Utiliser le vecteur position et le fait que chaque vecteur position correspond effectivement à une face. On peut en effet écrire l'équation du $i$ème hyperplan sous la forme $x_i = 0$ dans une base convenablement choisie. □

Lemme 9.13 *Pour tout arrangement simple H de n hyperplans dans E^d on a*

$$f_k(H) = \sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i}\binom{n}{d-i} = \binom{n}{d-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n-d+k}{k-i} \text{ et } i_k(H) = 2(d-k)f_k(H).$$

En particulier, pour d constant on a $f_k(H) = \Theta(n^d)$ et $i_k(H) = \Theta(n^d)$.

Preuve : Pour $n \leq d$ c'est le lemme 9.12. La preuve précédente pour le nombre d'incidences est encore valide pour $n > d$. On fait une preuve par récurrence sur d pour $f_k(H)$ lorsque $n > d$: le lemme est trivialement vrai en dimension 1. On suppose qu'il est vrai en dimension $d-1$. Soit H comme dans l'énoncé du lemme. Puisque l'arrangement est simple il a $f_0(H) = \binom{n}{d}$ sommets. On choisit une direction d'hyperplan ne contenant aucune des droites vectorielles déterminées par les paires de sommets de l'arrangement de H. On balaye l'arrangement par cet hyperplan de gauche à droite. À chaque fois que l'on balaye un sommet p de l'arrangement une cellule de plus se trouve à gauche de l'hyperplan de balayage. Cette cellule c correspond à l'une des cellules du sous-arrangement simple des d hyperplans de H s'intersectant au point p. Les k-faces supplémentaires balayées en p sont toutes des faces de c et sont donc au nombre de $\binom{d}{d-k}$ par le lemme 9.12. Lorsqu'on balaye le sommet le plus à droite on a donc balayé un nombre $f_0(H)\binom{d}{d-k}$ de k-faces. Il reste à compter les k-faces à l'extrême droite de l'arrangement. Elles sont en bijection avec les $(k-1)$-faces de l'arrangement simple de dimension $d-1$ obtenu en coupant $\mathcal{A}(H)$ par un hyperplan de balayage situé à droite du dernier sommet. Par hypothèse de récurrence il y a $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{d-1-i}{k-1-i}\binom{n}{d-1-i}$ telles faces. D'où :

$$f_k(H) = \binom{n}{d}\binom{d}{d-k} + \sum_{i=1}^{k}\binom{d-i}{k-i}\binom{n}{d-i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{d-i}{k-i}\binom{n}{d-i}.$$

□

Théorème 9.14 *Les valeurs de $f_k(H)$ et $i_k(H)$ du lemme 9.13 dans le cas simple sont des bornes supérieures dans le cas général, i.e. :*

$$f_k^d(n) = \sum_{i=0}^{k}\binom{d-i}{k-i}\binom{n}{d-i} \text{ et } i_k^d(n) = 2(d-k)f_k^d(n).$$

En considérant d constant on a en particulier

$$f_k^d(n) = \Theta(n^d) \text{ et } i_k^d(n) = \Theta(n^d).$$

Preuve : On utilise une double récurrence sur n et d. Le théorème est trivialement vrai pour $d = 1$ et n quelconque et pour $n = 2$ et d quelconque. On suppose le théorème vrai pour n hyperplans jusqu'à la dimension $d-1$ et en toute dimension pour au plus $n-1$ hyperplans. On se donne une famille $H = \{h_i\}_{1\leq i\leq n}$ de n hyperplans dans E^d et on pose $G = H \setminus \{h_n\}$. L'hyperplan h_n intersecte $\mathcal{A}(G)$ en un arrangement $\mathcal{A}(G')$ de dimension $d-1$ de $n-1$ hyperplans au plus. Une k-face de $\mathcal{A}(H)$ est soit

– une k-face de $\mathcal{A}(G)$,
– une k-face de $\mathcal{A}(G')$ ou
– une k-face de $\mathcal{A}(G)$ coupée en deux par h_n et qui correspond donc à une $(k-1)$-face de $\mathcal{A}(G')$.

On en déduit

$$f_k(H) \leq f_k(G) + f_k(G') + f_{k-1}(G').$$

Par hypothèse de récurrence on en déduit

$$\begin{aligned} f_k(H) &\leq \sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i}\binom{n-1}{d-i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{d-1-i}{k-i}\binom{n-1}{d-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{d-1-i}{k-1-i}\binom{n-1}{d-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i}\binom{n}{d-i}. \end{aligned}$$

Une paire de faces incidentes de dimensions respectives k et $k+1$ de $\mathcal{A}(H)$ provient soit
– d'une telle paire dans $\mathcal{A}(G)$,
– d'une telle paire dans $\mathcal{A}(G')$,
– d'une $(k+1)$-face de $\mathcal{A}(G)$ coupée en deux par h_n et de la k-face correspondant à leur intersection ou
– d'une paire dans $\mathcal{A}(G)$ coupée en deux par h_n et qui correspond donc a une paire de faces incidentes de dimension k et $k-1$ dans $\mathcal{A}(G')$.

On en déduit

$$\begin{aligned} i_k(H) \leq i_k(G) + i_k(G') + 2f_k(G') + i_{k-1}(G') &\leq 2(d-k)(f_k(G) + f_k(G') + f_{k-1}(G')) \\ &\leq 2(d-k)f_k^d(n) \end{aligned}$$

□

Définition 9.15 *Soit H un arrangement de n hyperplans dans E^d et h un $(n+1)$-ième hyperplan. La* zone *de h dans H est l'union des cellules dont l'adhérence intersecte h et des faces de ces cellules. On note $Z_k(h,H)$ l'ensemble des paires (f,c) où f est une face de codimension k de la cellule c de la zone. On note également $z_k(h,H)$ le cardinal de $Z_k(h,H)$ et $z_k(n,d)$ le maximum de cette valeur pour tout h et H.*

Théorème 9.16 (Théorème de la zone) *Pour d fixé, $z_k(n,d) = O(n^{d-1})$.*

Preuve : On suppose que $H \cup \{h\}$ est un arrangement simple et que $n > d$ (le résultat est asymptotique). On considère un hyperplan g de H et on compare la zone de h dans H avec celle de h dans $H \setminus \{g\}$ et de $h \cap g$ dans H/g (= arrangement de dimension $d-1$ de $H \setminus \{g\}$ intersecté avec g) afin d'établir une formule de récurrence. Plus précisément on s'intéresse au nombre $n_k(g)$ de paires (f,c) de $Z_k(h,H)$ où f n'est pas contenue dans g. Si l'adhérence $\bar{c}$ de c ne rencontre pas g, alors (f,c) est une paire de $Z_k(h, H \setminus \{g\})$. Sinon (f,c) provient d'une paire (ϕ,κ) de $Z_k(h, H \setminus \{g\})$ coupée en deux par g. On note (f',c') la seconde "moitié" de (ϕ,κ). Si (f',c') est également dans $Z_k(h,H)$ (i.e. si g ne sépare pas f' de h) alors la paire $(\phi \cap g, \kappa \cap g)$ est dans $Z_k(h \cap g, H/g)$ ce qui permet de comptabiliser

de manière univoque (f, c) dans $Z_k(h, H \setminus \{g\})$ et (f', c') dans $Z_k(h \cap g, H/g)$. On en déduit :

$$n_k(g) \leq z_k(h, H \setminus \{g\}) + z_k(h \cap g, H/g).$$

En sommant cette relation sur tous les hyperplans g de H et en remarquant que chaque paire de $Z_k(h, H)$ est comptée $(n-k)$ fois dans cette somme (par hypothèse de simplicité f est contenue dans exactement k hyperplans), on obtient

$$(n-k)z_k(h, H) \leq \sum_{g \in H} (z_k(h, H \setminus \{g\}) + z_k(h \cap g, H/g))$$

D'où

$$z_k(n, d) \leq \frac{n}{n-k}(z_k(n-1, d) + z_k(n-1, d-1))$$

Pour résoudre la récurrence, on commence par poser :

$$z_k(n, d) = \binom{n}{k} w_k(n, d) = O(n^k w_k(n, d))$$

pour se ramener à la récurrence :

$$w_k(n, d) \leq w_k(n-1, d) + w_k(n-1, d-1)$$

Il s'agit alors de montrer que $w_k(n, d) = O(n^{d-1-k})$. On résout cette récurrence en partant du cas planaire $d = 2$ déjà traité ($z_k(n, 2) = O(n) \implies w_k(n, 2) = O(n^{1-k})$). Par hypothèse de récurrence (sur d) on a donc $z_k(n, d-1) = O(n^{d-2})$. On en déduit

$$w_k(n, d) = w_k(n-1, d) + O(n^{d-2-k}) = w_k(d, d) + O(\sum_{i=d+1}^{n} i^{d-2-k})$$

Si $d - 2 - k \geq 0$ on obtient $w_k(n, d) = O(n^{d-1-k})$ comme annoncé. Sinon, pour $k = d-1$ et d, i.e. pour les sommets et les arêtes, on utilise un autre argument : On note $f(0, 3, c)$ le nombre de triplets (f_0, f_3, c) où f_0 est un sommet d'une 3-face f_3 d'une cellule c de la zone. On note de même $f(2, 3, c)$ le nombre de triplets (f_2, f_3, c) où f_2 est une 2-face d'une 3-face f_3 d'une cellule c de la zone. Comme chaque f_3 est un 3-polyèdre, on a dans une f_3 donnée : $\#f_0 \leq 2\#f_2$ (se déduit de la relation d'Euler et du fait que chaque sommet est incident à 3 arêtes au moins), d'où $f(0, 3, c) \leq 2f(2, 3, c)$. Par ailleurs, l'arrangement étant simple, chaque 2-face de c est contenue dans $(d-2)$ des 3-faces de c (penser au vecteur position). En sommant sur la zone, on en désuit : $\sum_c f(2, 3, c) \leq (d-2)f_{d-2}(h, H)$. On en déduit

$$f_d(h, H) \leq \sum_c f(0, 3, c) \leq 2 \sum_c f(2, 3, c) \leq 2(d-2)z_{d-2}(h, H),$$

d'où $z_d(h, H) = O(n^{d-1})$.

Enfin, par simplicité de l'arrangement, la clôture de chaque cellule est un polytope simple et chaque sommet y est incident à d arêtes. D'où $2z_{d-1}(h, H) = dz_d(h, H)$. On conclut avec l'inégalité précédente.

Dans le cas d'un arrangement non simple on peut montrer en perturbant les hyperplans que la complexité de la zone (les $z_k(n, d)$) est majorée par celle d'une configuration simple d'hyperplans. □

On retrouvera la preuve du théorème de la zone selon les mêmes lignes dans [Mul94, Sec. 6.2] et [Mat02, Sec. 6.4].

9.5 Niveaux d'un arrangement

Le *niveau* k d'une cellule c d'un arrangement $\mathcal{A}(H)$ est le bord de l'ensemble des points séparés de c par au plus k hyperplans de H. Plus généralement on considère un arrangement de demi-espaces (ou hyperplans orientés) et le niveau k de cette famille est le bord de l'ensemble des points qui sont exclus d'au plus k demi-espaces. Un tel arrangement est dit *réalisable* si l'intersection des demi-espaces est non-vide. C'est le cas ci-dessus où tout les demi-espaces contiennent la cellule c. Le niveau k d'un arrangement réalisable est une sphère ou un disque topologique ou vide. Sinon, un niveau peut être non-connexe. Il est difficile de donner une bonne borne pour la complexité du niveau k d'un arrangement. En dimension 2 et 3, cependant, de telles bornes existent pour les arrangements réalisables. Clarkson et Shor [CS89] montrent qu'en dimension 3 le niveau k a $\Theta(k(n-k))$ sommets dans le cas le pire. Des bornes supérieures ont été obtenues dans le cas général mais pour l'accumulation des k premiers niveaux. Ainsi le nombre de sommets de l'union des k premiers niveaux est un $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor}(k+1)^{\lceil d/2 \rceil})$.

On déduit de l'étude de la taille des niveaux des informations sur la complexité des diagrammes de Voronoi d'ordres supérieurs. Voir la section 8.2.3 à ce sujet.

On pourra consulter sur ce sujet le chapitre d'Uli Wagner dans [GPP08].

9.6 Dualité

À un point $x = (\mathbf{x}, x_d) \in E^d$ on associe l'hyperplan $\mathcal{D}(x)$ d'équation $y_d = 2\mathbf{x}.\mathbf{y} - x_d$. On définit ainsi une bijection de E^d dans l'espace des hyperplans non verticaux de E^d. On utilise la même notation pour l'inverse de $\mathcal{D}$.

On note U le paraboloide de révolution d'équation $x_d = \mathbf{x}^2$. Ce qui s'écrit encore $(x_d + \frac{1}{4})^2 = (x_d - \frac{1}{4})^2 + \mathbf{x}^2$. U a donc le point $(\mathbf{0}, \frac{1}{4})$ pour foyer et l'hyperplan $\{x_d = -\frac{1}{4}\}$ pour directrice. On note $T_U(x)$ l'hyperplan tangent en un point x de U.

Propriétés géométriques :

- deux points, p et q sont sur une même verticale si et seulement si $\mathcal{D}(p)$ et $\mathcal{D}(q)$ sont parallèles,
- plus spécifiquement, si τ est une translation verticale alors $\mathcal{D}(\tau.x) = \tau^{-1}.\mathcal{D}(x)$,
- Si $x \in U$ alors $\mathcal{D}(x) = T_U(x)$, ce qui avec la propriété précédente montre que pour x quelconque $\mathcal{D}(x)$ s'obtient comme l'hyperplan symétrique par rapport à $T_U(x')$ de l'hyperplan parallèle à $T_U(x')$ et passant par x, où x' est le point de U à la verticale de x,
- pour x en dessous de U, l'hyperplan tangent à U en un point de $\mathcal{D}(x) \cap U$ passe par x,

- pour x en dessous de U, $\mathcal{D}(x) \cap U$ se projette verticalement sur l'hyperplan horizontal en une (d-1)-sphère dont le centre est la projection de x et le carré du rayon la distance de x au point de U situé à la verticale de x.

Propriétés de dualité :

- $\mathcal{D} \circ \mathcal{D}$ est l'identité (par définition),

- x est dessous (resp. sur, resp. dessus) l'hyperplan non vertical h si et seulement si $\mathcal{D}(h)$ est dessous (resp. sur, resp. dessus) $\mathcal{D}(x)$,

- Soit h un hyperplan non vertical et $Q = \{x_1, \ldots, x_d\}$ un ensemble de d points de h affinement indépendants alors $\mathcal{D}(Q)$ définit un arrangement simple i.e. a un unique point d'intersection.
  Preuve : Un point appartient à l'intersection des hyperplans de $\mathcal{D}(Q)$ si et seulement si son hyperplan dual contient Q, i.e. si et seulement si son dual est h.

- Soit h un hyperplan non vertical et Q un ensemble quelconque de points dans h. L'enveloppe affine de Q est de dimension k si et seulement si $\mathcal{D}(Q)$ s'intersecte en un sous-espace de dimension $d - k - 1$.
  Preuve : Soit Q' une famille de $k + 1$ points de Q affinements indépendants. On les complètes en une famille indépendantes de d points de h. D'après le point précédent les hyperplans duaux de cette famille forment un arrangement simple et c'est donc le cas pour la sous famille $\mathcal{D}(Q')$. Leur intersection est donc un sous-espace affine de dimension $d - k - 1$. Les autres points de Q étant affinement liés à Q' l'équation de leurs hyperplans duaux sont des combinaisons linéaires de celles de Q' et contiennent donc leur intersection.

- Comme corollaire du point précédent on a :
  Soit Q un ensemble de n points dans E^d et $H = \mathcal{D}(Q)$. Soit h un hyperplan non vertical. L'enveloppe affine des points de Q situés sur h est de dimension k si et seulement si $\mathcal{D}(h)$ est contenu dans l'intérieur d'une $(d - 1 - k)$-face de $\mathcal{A}(H)$.
  Preuve : les hyperplans duaux des points de Q sur h définissent un sous-espace affine de dimension $d-k-1$. Or les autres points de Q n'étant pas sur h, leur dual ne contient pas $\mathcal{D}(h)$ et évitent une petite boule centrée en ce point. L'intersection de cette boule avec le sous-espace s'étend en une unique $(d - 1 - k)$-face de $\mathcal{A}(H)$.

- Puisque la dualité préserve les positions relatives (dessous/dessus) entre points et hyperplans non verticaux, un hyperplan dual d'un point p intérieur à une cellule de $\mathcal{A}(H)$ sépare les points de Q en deux ensembles indépendants du point p choisi dans la cellule. La réciproque est cependant fausse car il peut y avoir des cellules dont les vecteurs positions sont "opposés". Cela ne peut arriver que pour des paires de cellules non bornées.

Exercice 9.17 *Donner un algorithme de complexité $O(n \log n)$ pour trouver une boîte rectangulaire parallèle aux axes contenant tous les sommets d'un arrangement de n droites.*

Exercice 9.18 *Soient n points du plan. Donner un algorithme de complexité quadratique pour trouver une droite passant par le plus possible de ces points.*

Exercice 9.19 *Soient n segments du plan. Trouver un algorithme quadratique pour décider si ces segments peuvent être tous percés par une même droite.*

Exercice 9.20 *Étant donnés n points rouges et m points bleus en position générale dans le plan, trouver une droite qui "coupe" simultanément les points rouges et les points bleus en deux, c'est-à-dire telle que chaque demi-plan ouvert délimité par cette droite contient au plus $n/2$ points rouges et $m/2$ points bleus. Quelle est la complexité de votre algorithme ?*

L'exercice précédent est une version discrète du célèbre théorème du Sandwich. De multiples extensions ont été considérées dans la littérature, que ce soit en dimension supérieure ou avec des ensembles de points comportant plus de couleurs. Matoušek [LMS94] résoud l'exercice précédent en temps linéaire !

Références

- Computational Geometry. Algorithms and applications. de Berg, van Kreveld, Overmars and Schwarzkopf. Springer 1997.

- Algorithms in Combinatorial Geometry. H. Edelsbrunner. Springer Verlag Monographs in TCS. 1987.

- Algorithmic Geometry. J-D Boissonat et M. Yvinec. Cambridge University Press, 1998 (version française : Ediscience international, 1995).

Pour les arrangements et les balayages voir également l'article d'Edelsbrunner et Guibas [EG89]. On y montre en particulier qu'on peut balayer un arrangement de n droites dans le plan en temps $O(n^2)$. Un balayage simple selon les abscisses des intersections auraient une complexité en $O(n^2 \log n)$. L'idée est ici de remplacer la droite verticale de balayage par une front x-monotone de balayage. Ce front est composé d'un segment par droite dans un ordre "vertical". Chaque fois que l'on balaye un point d'intersection dans l'arrangement on intervertit l'ordre de deux droites. Le problème est de savoir quelles sont les paires de droites qui peuvent s'intersecter dans la suite du balayage (i.e. dont les segments du front ont leur point droit en commun). Pour avoir cette information en temps constant on maintient deux structures annexes : les arbres d'horizons supérieur et inférieur. La mise à jour de ces arbres après chaque balayage utilise un parcours de ligne d'horizon. Voir aussi les nombreuses applications dans le même article.