

# Chapitre 2

## Graphes planaires

Les graphes planaires apparaissent sous la forme de réseaux routiers, de frontières dans les cartes géographiques, de circuits imprimés ou encore dans un cadre plus théorique, comme les graphes sommets/arêtes (1-squelettes) des 3-polytopes. La plupart des propriétés des graphes planaires font appel de manière plus ou moins explicite au fameux théorème de Jordan.

Sauf avis contraire, on considère dans ce chapitre des graphes *simples*, i.e. sans arête multiple ni boucle.

### 2.1 Plongements

**Définition 2.1** *Un plongement d'un graphe  $G = (S, A)$  dans un espace  $X$  est la donnée d'une injection  $S \hookrightarrow X$  et pour chaque arête  $a \in A$ , d'un plongement  $p_a : [0, 1] \rightarrow X$  dont les extrémités coïncident avec l'injection de celles de  $a$ , de sorte que les plongements de deux arêtes ne s'intersectent qu'en leurs extrémités communes, le cas échéant. On appelle arc le plongement d'une arête.*

**Définition 2.2** *Un graphe est planaire s'il peut être plongé dans le plan. Un graphe plan est un graphe plongé dans le plan. Dit autrement un graphe plan est un plongement particulier d'un graphe planaire. Un plongement d'un graphe dont tous les arcs sont polygonaux est dit polygonal - ou PL (pour piecewise linear). Une face d'un graphe plan est une composante connexe du complémentaire du plongement du graphe dans le plan.*

Par la suite on utilisera la même notation pour un graphe plan et son plongement. Ainsi, si  $s$  est un sommet du graphe plan  $G$ , alors  $G - s$  désignera soit le graphe  $G$  privé de  $s$  et des arêtes incidentes à  $s$ , soit son plongement, i.e. le plongement de  $G$  privé de  $s$  et des arcs correspondant aux arêtes incidentes à  $s$ .

**Lemme 2.3** *Un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  connexe (par arcs) est connexe par arcs polygonaux simples.*

**Preuve :** Soit  $\gamma : p \rightsquigarrow q$  un chemin dans un ouvert  $\Omega$  connexe. Considérer le sup des  $t \in [0, 1]$  tels qu'il existe un chemin polygonal simple reliant  $x$  à  $\gamma(t)$  dans  $\Omega$ . Montrer que ce nombre vaut nécessairement 1.  $\square$

**Lemme 2.4** *Tout graphe planaire admet un plongement polygonal.*

**Preuve :** Considérons un plongement d'un graphe planaire. On choisit pour chaque sommet  $p$  du plongement un disque  $D_p$  de centre  $p$  de sorte que  $D_p$  n'intersecte que les arcs incidents à  $p$  et que deux tels disques  $D_p$  et  $D_q$  soient disjoints. Pour chaque arc joignant  $p$  à  $q$ , on considère une composante  $C_{p,q}$  de cet arc joignant  $D_p$  à  $D_q$ . On considère maintenant le sous-ensemble du plan formé des disques  $D_p$  et des arcs  $C_{p,q}$ . Par le lemme précédent,  $C_{p,q}$  peut être remplacé par un arc polygonal dans le plan privé des autres arcs et des disques  $D_r$  pour  $r \neq p, q$ . On peut ensuite extraire de cet arc polygonal un sous arc  $C'_{p,q}$  joignant  $D_p$  à  $D_q$  sans rencontrer l'intérieur de ces disques. Finalement, en prolongeant tous les arcs polygonaux  $C'_{p,q}$  ainsi obtenus par des segments de droites joignant les centres des disques  $D_p$  et  $D_q$ , on obtient un plongement polygonal.  $\square$

## 2.2 Le théorème de Jordan

Le théorème de Jordan (du mathématicien français Camille Jordan. 1838 - 1922) établit qu'une courbe fermée simple du plan sépare le plan en deux composantes bordées par cette courbe. Ce résultat évident en apparence est singulièrement difficile à montrer. La preuve qui suit est tirée de

*A Proof of the Jordan Curve Theorem.* Helge Tverberg. Bull. London Math. Soc. 12(1980), pp. 34-38.

Elle consiste à montrer ce théorème pour les courbes polygonales et à l'attendre aux courbes continues par un processus de passage à la limite.

Une autre preuve a été donnée par Thomassen dans *The Jordan-Schönflies Theorem and the classification of surfaces.* Carsten Thomassen. American Mathematical Monthly. Feb 1992. pp 116-129.

également reprise dans

*Graphs on Surfaces.* Bojan Mohar et Carsten Thomassen. Johns Hopkins university Press, 2001.

Comme chez Tverberg, Thomassen commence par traiter le cas des courbes polygonales. Le cas général est ramené (de manière élégante en ce qui concerne la non-connexité du complémentaire d'une courbe) à la non-planarité de  $K_{3,3}$ .

Ces preuves font appel à un minimum de topologie et se limitent plus ou moins aux implications classiques de la compacité pour les applications continues. Les preuves sont de ce fait relativement accessibles bien qu'assez fastidieuses. On trouvera cependant dans les livres de topologie algébriques des preuves plus courtes et plus générales (où l'on traite des injections d'une  $(n-1)$ -sphère dans une  $n$ -sphère) faisant appel aux suites de Mayer-Vietoris pour le calcul de l'homologie des espaces en jeu. Voir par exemple *Elements of Algebraic Topology.* James Munkres. Perseus Books, 1984.

Le cas plus restreint des courbes différentiables est traité dans *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Marcel Berger et Bernard Gostiaux. PUF mathématiques, 1987.

**Théorème 2.5 (Jordan - version polygonale)** *Soit  $C$  une courbe polygonale fermée simple. Alors  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  a deux composantes, l'une bornée, l'autre non-bornée, toutes deux bordées par  $C$ .*

**Preuve :** Notons tout d'abord que  $C$  étant compact  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  a exactement une composante non bornée. Soit une direction  $\vec{d}$  transverse aux segments de  $C$  que l'on appellera direction horizontale. On considère les segments de  $C$  semi-ouverts supérieurement (s.o.s), i.e. privés de leur sommet supérieur. On note  $\pi(z)$  la parité du nombre de segments s.o.s de  $C$  coupés par la demi-droite horizontale  $(z, \vec{d})$ . On vérifie que  $\pi$  est localement constante dans  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  (regarder les arêtes qui coupent une petite bande horizontale centrée autour de  $z$ ). Donc  $\pi$  est constante sur chaque composante de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . De plus,  $\pi$  prend des valeurs distinctes de chaque côté d'un segment de  $C$ . Il suit que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  a au moins deux composantes. Soit  $V_C$  un voisinage tubulaire de  $C$ , et soit  $D$  un petit disque intersectant  $C$  en un segment, de sorte que  $D$  est coupé par  $C$  en exactement deux composantes. Considérons alors un point  $p$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Il existe un chemin dans  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  joignant  $p$  à  $V_C$  (exemple : un segment de droite). En prolongeant ce chemin dans  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  on peut s'arranger pour qu'il joigne  $D$  en restant dans  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Il suit que  $p$  est dans la même composante que l'une des deux composantes de  $D \setminus C$ . Dit autrement,  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  a au plus deux composantes et donc exactement deux composantes. Par ailleurs les arguments qui précèdent montrent également que tout point de  $C$  est adhérent aux deux composantes de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ .  $\square$

Avant de passer à la version générale du théorème, voici quelques applications.

**Corollaire 2.6 (Lemme du  $\theta$ )** *Soient  $C_1, C_2, C_3$  trois courbes polygonales simples (non fermées) ayant en commun leurs extrémités  $p$  et  $q$ . Alors le graphe  $G = C_1 \cup C_2 \cup C_3$  a précisément 3 faces respectivement bordées par  $C_1 \cup C_2$ ,  $C_2 \cup C_3$  et  $C_3 \cup C_1$ .*

**Preuve :** Par la version polygonale du théorème de Jordan, les trois courbes fermées simples  $G_k = C_i \cup C_j$ ,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , séparent le plan en deux composantes et bordent ces mêmes composantes. On note  $X_k$  (resp.  $Y_k$ ) la face bornée (resp. non-bornée) de  $G_k$ . On note également  $\overset{\circ}{C}_i = C_i \setminus \{p, q\}$  l'intérieur relatif de  $C_i$ .

Remarquons qu'une courbe polygonale simple (ici privée de ses extrémités) ne peut séparer un ouvert connexe en plus de deux composantes (cf. la preuve du théorème de Jordan polygonal). Comme  $\overset{\circ}{C}_3$  est inclus dans l'une des faces de  $G_3$  on en déduit que  $G = G_3 \cup \overset{\circ}{C}_3$  a au plus trois faces.

Par ailleurs on a  $\overset{\circ}{C}_i \subset X_i$  pour au moins un indice  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Dans le cas contraire on a  $C_i \subset \complement X_i$  et donc  $G_i \subset G \subset \complement X_i$ , d'où  $X_i \subset \complement G \subset \complement G_i$ . Dit autrement  $X_i$  est une face de  $G$ . Comme les  $X_i$  sont distincts ( $C_i \subset \bar{X}_j$  mais  $\overset{\circ}{C}_i \not\subset \bar{X}_i$ ) on en conclut que  $G$  a

au moins trois faces bornées et donc au moins quatre faces ce qui contredit la remarque précédente. On supposera par la suite  $\overset{\circ}{C}_3 \subset X_3$ .

De  $G = G_1 \cup G_2$  on tire que toute face de  $G$  est une composante de l'intersection d'une face de  $G_1$  avec une face de  $G_2$ . De  $G_3 \subset G \subset \mathbb{C}Y_3$  on tire que  $Y_3$  est une face de  $G$ . Comme  $Y_3$  est non bornée on a  $Y_3 \subset Y_1 \cap Y_2$ .

Comme  $C_1 \subset \bar{Y}_3 \subset \bar{Y}_1 = \mathbb{C}X_1$ , on a en fait  $G_1 \subset G \subset \mathbb{C}X_1$  et donc  $X_1$  est une face de  $G$ . De même  $X_2$  est une face de  $G$ . Or,  $Y_3$  qui est non bornée est distincte des deux faces bornées  $X_1$  et  $X_2$ , elles mêmes distinctes ( $C_1$  borde  $X_2$  mais pas  $X_1$ ). On conclut que  $Y_3$ ,  $X_1$  et  $X_2$  sont les trois faces de  $G$ .  $\square$

**Définition 2.7** *Un graphe  $G$  est 2-connexe s'il a trois sommets au moins et si pour chacun de ses sommets,  $s$ , le graphe  $G - s$  est connexe.*

**Proposition 2.8** *Toute face d'un graphe plan polygonal 2-connexe est bordée par un cycle de ce graphe. De plus tout arc du graphe est incident (i.e. adhérent) à exactement deux faces.*

**Preuve :** Soit  $G$  un tel graphe. On raisonne par récurrence sur  $\sum_{s \in S(G)} (d(s) - 2)$ . Si cette somme est nulle alors  $G$  est un cycle et on peut appliquer le théorème de Jordan. Sinon, on considère une chaîne maximale  $P$  dans  $G$  dont les sommets intérieurs sont de degré 2. On vérifie que  $G - P$  est 2-connexe et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, puisque la somme ci-dessus diminue. Il suit que  $P$  est contenue dans une face de  $G - P$  qui est bordée par un cycle de  $G - P$ . On applique alors le lemme du  $\theta$  à l'union de ce cycle et de  $P$  pour conclure.  $\square$

**Lemme 2.9** *Soit  $G$  un graphe plan polygonal,  $s$  un sommet de degré un de  $G$  et  $a$  l'arête incidente à  $s$ . Alors  $G$  a le même nombre de faces que  $G - s$ .*

**Preuve :** Comme  $G - s$  est inclus dans  $G$ , toute face de  $G$  est incluse dans une face de  $G - s$ . Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux faces de  $G$  incluses dans une même face de  $G - s$  et soient  $p_1$  et  $p_2$  deux points respectivement intérieurs à  $f_1$  et  $f_2$ . Alors il existe un chemin polygonal  $P$  joignant  $p_1$  et  $p_2$  dont l'intersection avec  $G$  est incluse dans l'arc semi-ouvert  $a \cup s$ . En considérant un petit voisinage tubulaire de  $a \cup s$ , on peut modifier  $P$  en contournant  $a$  de manière à éviter  $G$ , ce qui montre que  $f_1 = f_2$ .  $\square$

**Théorème 2.10 (Relation d'Euler)** *Les nombres  $F$ ,  $A$  et  $S$  de faces, arêtes et sommets d'un graphe plan polygonal connexe vérifient la relation, dite d'Euler (1707-1783),*

$$F - A + S = 2$$

**Preuve :** Par récurrence sur  $A$ . Si  $A$  est nul (et donc  $S = 1$ ) la relation est trivialement vraie. Soit  $G$  un graphe avec  $A > 0$  arêtes. Si  $G$  contient un sommet  $s$  de degré un, alors par le lemme 2.9,  $G - s$  a  $F$  faces et l'hypothèse de récurrence appliquée à  $G - s$  permet de confirmer la relation d'Euler pour  $G$ . Sinon  $G$  contient un cycle simple  $C$ . Soit  $a$  une

arête de  $C$ . Montrons que  $G - a$  a une face de moins que  $G$  ce qui permettra de conclure avec l'hypothèse de récurrence. D'après la version polygonale du théorème de Jordan,  $C$  sépare le plan en deux régions bordées par  $C$ . Comme  $G$  est la réunion de  $C$  et  $G - a$ , toute face de  $G$  est incluse dans l'intersection d'une face de  $C$  et d'une face de  $G - a$ . L'arc  $a$  est inclus dans une unique face de  $G - a$ , disons  $f$ . Toute face de  $G - a$  distincte de  $f$  ne rencontre pas  $C$  et est donc une face de  $G$ . Comme  $f$  intersecte les deux faces de  $C$ , on en déduit que  $G$  a au moins une face de plus que  $G - a$ . Mais en considérant un voisinage tubulaire de  $a$  dans  $f$ , on montre par un raisonnement déjà vu que  $f - a$  a au plus deux composantes. Donc  $G$  a au plus une face de plus que  $G - a$ . Finalement  $G$  a exactement une face de plus que  $G - a$ .  $\square$

Pour une série de preuves plus ou moins formelles de cette fameuse formule on pourra consulter la page :

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>

extraite du par ailleurs très intéressant site : "The Geometry Junkyard" maintenu par David Eppstein.

Un célèbre casse-tête, parfois présenté comme le problème de l'eau du gaz et de l'électricité [BLW98, p.142], demande de dessiner dans le plan 3 maisons et 3 distributeurs pour l'eau, gaz et de l'électricité et de relier chaque maison à chaque distributeur sans que les liens ne se coupent. Le théorème suivant affirme que c'est impossible.

**Théorème 2.11** *Le graphe complet  $K_5$  et le graphe bipartite complet  $K_{3,3}$  ne sont pas planaires.*

**Preuve :** Supposons  $K_{3,3}$  planaire. Par le lemme 2.4, on peut lui appliquer la relation d'Euler, ce qui fournit  $F = 5$ . Par ailleurs toute face d'un plongement de  $K_{3,3}$  est bordée par un cycle (cf. proposition 2.8) de  $K_{3,3}$  ayant au moins 4 arêtes (tout cycle d'un graphe bipartite est de longueur paire!). Par la relation d'incidence face/arête (cf. proposition 2.8) on en déduit  $4F \leq 2A$ . Une contradiction.

Le cas de  $K_5$  se traite de manière similaire.  $\square$

Passons maintenant au théorème de Jordan dans sa version générale (plane).

**Théorème 2.12 (Jordan)** *Soit  $C$  une courbe fermée simple, i.e. l'image injective par une application continue du cercle unité  $S^1$  dans le plan. Alors  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  a deux composantes, l'une bornée, l'autre non-bornée, toutes deux bordées par  $C$ .*

**Preuve :** Je donne sans entrer dans tous les détails la preuve de Tverberg (1980).

Tout d'abord  $C$  peut être approximée d'aussi près que l'on veut par une courbe polygonale. Dit autrement, pour tout  $\epsilon$  positif on peut trouver un polygone de Jordan (= une courbe polygonale simple fermée)  $C'$  tel que

$$|C - C'| = \sup_{x \in S^1} |C(x) - C'(x)| < \epsilon.$$

La preuve consiste à couvrir le plan d'une grille à mailles carrées de côté  $\delta$  (défini plus loin). On pose  $C_0 = C$  et on considère un à un les carrés de la grille traversés par  $C$  (ils sont en nombre fini). Pour chaque tel carré  $M_i$ , on remplace l'image par  $C_i$  du plus petit arc de  $S^1$  contenant  $C_i^{-1}(M_i)$  par le segment de droite joignant ses extrémités, obtenant ainsi  $C_{i+1}$ .  $C_n$ , où  $n$  est le nombre de carrés traversés, est la courbe  $C'$  cherchée. Pour définir  $\delta$  on choisit tout d'abord  $\epsilon_1$  tel que

$$|x - y| < \epsilon_1 \implies |C(x) - C(y)| < \epsilon/2,$$

puis  $\epsilon_2$  tel que

$$|C(x) - C(y)| < \epsilon_2 \implies |x - y| < \min(\epsilon_1, \sqrt{3}).$$

L'existence de  $\epsilon_1$  découle de l'uniforme continuité de  $C$  sur le compact  $S^1$ . Celle de  $\epsilon_2$  de l'uniforme continuité de  $C^{-1}$ , inverse d'une bijection continue sur le compact  $C(S^1)$ . On pose alors  $\delta = \min(\epsilon/2, \epsilon_2)$ . Il reste à vérifier que  $C_n$  ainsi construit convient. (La solution est dans l'article de Tverberg).

Un premier lemme : Si  $C'$  est un polygone de Jordan, alors la composante bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus C'$  contient un disque touchant  $C'$  en deux points  $C'(x)$  et  $C'(y)$  tels que  $|x - y| > \sqrt{3}$ .

Pour la preuve, on considère un disque  $D$  comme dans le lemme avec  $|x - y|$  maximal. Si  $|x - y| < \sqrt{3}$  alors tout point  $z$  sur le plus grand arc  $A$  de  $S^1$  joignant  $x$  et  $y$  est à une distance de  $x$  ou de  $y$  supérieure à celle de  $x$  à  $y$ . On en déduit par l'hypothèse sur  $x$  et  $y$  que, en dehors de ses extrémités,  $C'(A)$  ne touche pas le bord de  $D$ . Une construction simple, dépendant du fait que  $D$  est tangent ou non en  $C'(x)$  et  $C'(y)$ , permet alors de remplacer  $D$  par un disque  $D'$  touchant  $C'$  en  $C'(x')$  et  $C'(y')$  tels que  $|x' - y'| > |x - y|$ , contredisant ainsi l'hypothèse sur  $x$  et  $y$ . (voir les détails dans l'article de Tverberg).

Un second lemme : Soit  $C'$  un polygone de Jordan, et deux points  $a$  et  $b$  dans la même composante de  $\mathbb{R}^2 \setminus C'$ . Si la distance de  $a$  et de  $b$  à  $C'$  est supérieure ou égale à 1, et si aucune corde de  $C'$  de longueur inférieure à 2, ne sépare  $a$  de  $b$ , alors il existe un chemin continue  $\Pi$  de  $a$  à  $b$  tel que  $d(\Pi, C') \geq 1$ .

On commence par remarquer que l'implication du lemme est en fait une équivalence. Il suit que si  $a$  et  $b$  sont reliés à  $a'$  et  $b'$  par des chemins distants d'au moins 1 de  $C'$ , alors les hypothèses sur  $a$  et  $b$  sont valides pour  $a'$  et  $b'$ . On peut donc supposer que  $a$  et  $b$  sont à distance exactement 1 de  $C'$ . On considère le disque de rayon 1 centré en  $a$  et l'idée est de définir  $\Pi$  comme le lieu du centre de ce disque roulant le long de  $C'$  jusqu'à atteindre  $b$ . Comme ce disque doit rester intérieur à  $C'$ , il devra possiblement court-circuiter des arcs de  $C'$  et il s'agit de montrer qu'on peut malgré tout atteindre  $b$  dans tous les cas. On utilisera pour cela l'hypothèse sur les cordes. (voir les détails dans l'article de Tverberg).

Terminons par la preuve du théorème.

Premièrement,  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  a au moins deux composantes :

Montrons qu'en plus d'une composante non bornée, il en existe une bornée. On considère pour cela un disque  $D_0$  contenant  $C$ , et une suite  $(C_n)_{n>0}$  de polygones de Jordan contenus dans  $D_0$  et convergeant vers  $C$ . Par le premier lemme, chaque  $C_n$  contient un disque  $D_n$  touchant  $C_n$  en deux points  $C_n(x_n)$  et  $C_n(y_n)$  tels que  $|x_n - y_n| > \sqrt{3}$ . Soit  $z_n$  le centre de  $D_n$ , et soit  $z$  la limite d'une sous-suite convergente de  $(z_n)$ . On va montrer que  $z$  ne peut être dans la composante non bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  en se ramenant au cas des polygones

de Jordan, déjà traité. Par compacité,  $|C(x_n) - C(y_n)|$  est borné inférieurement. Par convergence, il en est de même de  $|C_n(x_n) - C_n(y_n)|$ . Ce qui implique la même chose pour le rayon de  $D_n$  et donc pour  $d(z_n, C_n)$ . Comme  $z_n \rightarrow z$ ,  $z$  est dans  $D_n$  pour  $n$  assez grand et donc intérieur à  $C_n$ . Si  $z$  était hors de  $D_0$ , alors on pourrait trouver un chemin  $\Pi$  le reliant à un point hors de  $D_0$ . Par compacité,  $d(\Pi, C) > 0$ , donc  $d(\Pi, C_n) > 0$  pour  $n$  assez grand. Donc  $z$  est hors de  $C_n$ , une contradiction.

Deuxièmement,  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  a au plus deux composantes :

Soient  $p, q$  et  $r$  trois points de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . On veut montrer que deux de ces points sont nécessairement dans une même composante. On considère à nouveau une suite  $(C_n)_{n>0}$  de polygones de Jordan convergeant vers  $C$ . Pour  $n$  assez grand  $p, q$  et  $r$  sont dans  $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$  (i.e. à une distance non nulle de  $C_n$ ). Quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que  $p$  et  $q$  sont dans une même composante de  $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$ . Si pour une infinité de  $n$ ,  $p$  peut être relié à  $q$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$  par un chemin  $\Pi_n$  tel que  $d(\Pi_n, C_n)$  est borné inférieurement, alors il en sera de même pour  $d(\Pi_n, C)$  à partir d'un certain rang, ce qui montre que  $p$  et  $q$  sont dans une même composante de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Sinon, par le second lemme on peut trouver une suite de segments  $[C_n(x_n), C_n(y_n)]$  séparant  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$ , et dont la longueur tend vers 0. On en déduit que  $|C(x_n) - C(y_n)|$  tend vers 0 et donc que  $|x_n - y_n|$  tend vers 0, par continuité uniforme de  $C^{-1}$ . Mais alors la plus petite des deux composantes de  $\mathbb{R}^2 \setminus C_n \cup [C_n(x_n), C_n(y_n)]$  converge vers un point, impliquant que  $p$  ou  $q$  est sur  $C_n$ , une contradiction.  $\square$

On a coutume d'appeler une courbe fermée simple du plan, un *courbe de Jordan*. Notons qu'en modifiant le deuxième de la preuve, on montre sans trop de difficultés que

**Théorème 2.13** *Un arc simple du plan (i.e. l'image continue injective du segment  $[0, 1]$ ) ne sépare pas le plan.*

Une version plus forte du théorème de Jordan stipule que l'intérieur d'une courbe de Jordan est un disque topologique :

**Théorème 2.14 (de Jordan-Schönflies)** *Tout homéomorphisme entre deux courbes de Jordan s'étend au plan tout entier.*

Une preuve est donnée dans

*The Jordan-Schönflies Theorem and the classification of surfaces.* Carsten Thomassen. American Mathematical Monthly. Feb 1992. pp 116-129.

Sans entrer dans les détails, Thomassen commence par considérer une famille dénombrable de points qui soit dense dans la première courbe, disons  $C$ , et qui puissent être joint à tout point de l'intérieur de  $C$  par un chemin polygonal. Il considère également une famille dénombrable de points qui soit dense dans l'intérieur de  $C$ . On peut alors en déduire une suite où chaque point de ces deux familles apparaît une infinité de fois. On construit alors récursivement un homéomorphisme entre l'union de  $C$  et des  $n$  premiers points de la suite (plus d'autres points autour) et l'union de la seconde courbe, que l'on peut supposer polygonale, et de  $n$  points (plus d'autres points autour) qui vont

également remplir l'intérieur de cette courbe polygonale. On obtient à la limite une application définie sur  $C$  et la suite de points. On montre que cette application se prolonge sur l'adhérence de l'intérieur de  $C$  en un homéomorphisme. Pour définir un homéomorphisme sur le plan tout entier, on commence par entourer les deux courbes d'un grand carré,  $T$ , que l'on relie aux deux courbes, ce qui permet d'étendre l'homéomorphisme sur ces courbes, en prenant l'identité sur  $T$ . La méthode précédente permet d'étendre cet homéomorphisme sur l'intérieur de  $T$  que l'on prolonge finalement par l'identité en dehors de  $T$ .

À l'aide de ce théorème on montre un analogue général au lemme du thêta et à la relation d'Euler.

## 2.3 Graphes interdits

Un des résultats les plus célèbres sur la planarité est la réciproque du théorème 2.11 due au mathématicien Kazimierz Kuratowski (1896 - 1980), stipulant qu'un graphe ne "contenant" ni  $K_5$  ni  $K_{3,3}$  est planaire. Les graphes  $K_5$  et  $K_{3,3}$  sont ainsi appelés *graphes interdits* ou graphes de Kuratowski. De manière plus générale on montre que pour chaque surface de genre  $g$  il existe un nombre fini de graphes interdits empêchant un graphe quelconque d'être plongé sur cette surface.

**Théorème 2.15 (de Kuratowski)** *Un graphe est planaire si et seulement s'il ne contient pas de subdivision de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$  comme sous-graphe.*

La preuve qui suit, tirée de *Graphs on Surfaces*. Bojan Mohar et Carsten Thomassen. Johns Hopkins university Press, 2001.

repose sur trois lemmes, par ailleurs intéressants en eux-mêmes.

Rappelons qu'un graphe est *3-connexe* s'il a au moins 4 sommets et si la suppression de 2 sommets quelconques ne le déconnecte pas. Par la caractérisation classique de Menger, un graphe est 3-connexe si et seulement si toute paire de sommets peut être relié par trois chemins disjoints en dehors de leurs extrémités.

**Lemme 2.16** *Soit  $G$  un graphe 3-connexe ayant au moins 5 sommets. Alors  $G$  admet une arête  $e$  telle que  $G//e$  (i.e. la suppression de  $e$ , suivie de l'identification des extrémités de  $e$ , suivie de la fusion des éventuelles arêtes multiples en arêtes simples de mêmes extrémités) est 3-connexe.*

**Preuve :** Supposons par l'absurde que pour toute arête  $e = xy$  de  $G$ ,  $G//e$  n'est pas 3-connexe. Alors il existe  $z, t \in S(G//e)$  (les sommets de  $G//e$ ) qui déconnectent  $G//e$ , où  $t$  résulte nécessairement de l'identification de  $x$  et  $y$ . Dit autrement, pour toute arête  $e = xy$ , il existe  $z \in S(G)$  tel que  $G - \{x, y, z\}$  n'est pas connexe. On choisit  $e$  et  $z$  de sorte que la plus grande (en nombre de sommets) des composantes de  $G - \{x, y, z\}$  soit maximale. Soit  $H$  cette composante et soit  $u$  adjacent à  $z$  dans une composante de



$G - \{x, y, z\}$  autre que  $H$ . D'après ce qui précède, il existe  $v \in S(G)$  tel que  $G - \{z, u, v\}$  ne soit pas connexe. Montrons que le sous-graphe  $H'$  de  $G$  induit par  $(S(H) \cup \{x, y\}) \setminus \{v\}$  est connexe. Comme ce sous-graphe est contenu dans une composante de  $G - \{z, u, v\}$  et qu'il a plus de sommets que  $H$ , on aboutit à une contradiction. Pour montrer la connexité de  $H'$  il suffit de vérifier que tout sommet  $t$  de  $H$  peut être relié à  $x$  ou  $y$  (eux même reliés par l'arête  $e$ ) dans  $H'$  : par la 3-connexité de  $G$ , on a l'existence d'un chemin simple  $p : t \rightsquigarrow x$  dans  $G$  qui évite  $z$  et  $v$ . Quitte à remplacer  $x$  par  $y$  on peut supposer que  $p - x$  ne contient ni  $x$  ni  $y$ . Donc  $p - x$  est inclus dans  $G - \{x, y, z\}$ , donc dans  $H$ . On en déduit que  $p$  est dans  $H'$ .  $\square$

**Proposition 2.17** *Soit  $G$  un graphe 3-connexe ne contenant pas de subdivision de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$  comme sous-graphe. Alors  $G$  admet un plongement rectiligne convexe (i.e. dont les arêtes sont des segments de droites et dont les faces sont des convexes) dans le plan.*

**Preuve :** Notons que ce lemme implique une version du théorème de Kuratowski restreinte aux graphes 3-connexes. Pour la preuve, on raisonne par récurrence sur le nombre de sommets de  $G$ . Le résultat se vérifie à la main si ce nombre vaut 4 ou 5. Par le précédent lemme on peut choisir une arête  $e = xy$  telle que  $G' = G//e$  est 3-connexe. Clairement  $G'$  ne contient pas de subdivision d'un graphe interdit (on vérifie sinon que se serait le cas pour  $G$ ). Par l'hypothèse de récurrence  $G'$  possède un plongement rectiligne convexe. Soit  $z$  le sommet de  $G'$  résultant de l'identification de  $x$  et  $y$ .  $G' - z$  est 2-connexe. Par la proposition 2.8, on considère le cycle  $C$  de  $G' - z$  bordant la face de  $G' - z$  contenant  $z$ . Soit  $X$  (resp.  $Y$ ) l'ensemble des extrémités des arêtes de  $G$  reliant  $x$  (resp.  $y$ ) à ce cycle. On vérifie que  $X$  et  $Y$  ne peuvent se chevaucher (i.e.  $|X \cap Y| \leq 2$  et il n'y a pas deux sommets de  $X$  et deux sommets de  $Y$  apparaissant de manière alternée autour de  $C$ ). Dans le cas contraire on met en évidence un graphe interdit dans  $G$ . Ceci permet de construire un plongement convexe pour  $G$  en remplaçant  $z$  par  $x$  dans le plongement de  $G'$  et en insérant  $y$  dans la face bordée par  $x$  et par le segment de  $C$  où se rattache les arêtes incidentes à  $y$ . Notons que si  $z$  est sur la face externe de  $G'$ , une transformation projective permet de rendre cette face interne.  $\square$

**Exercice 2.18** *Soit  $e$  une arête de  $G$ . Montrer que si  $G//e$  contient une subdivision de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$ , alors c'est également le cas pour  $G$ . (Indication : il se peut que  $G//e$  et  $G$  ne contiennent pas le même graphe interdit).*

Le lemme suivant permet de se ramener au précédent dans tous les cas :

**Lemme 2.19** *Soit  $G$  un graphe ne contenant pas de subdivision de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$  comme sous-graphe et tel que l'ajout d'une arête entre toute paire de sommets non-adjacents crée un tel sous-graphe. Alors  $G$  est 3-connexe.*

**Preuve :** On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets de  $G$ . Le résultat se vérifie à la main si ce nombre vaut 4 ou 5.

$G$  est 2-connexe :

sinon on peut écrire  $G = G_1 \cup G_2$  où  $G_1$  et  $G_2$  n'ont qu'un sommet  $x$  en commun. Soit  $y_i \in G_i, i = 1, 2$ , adjacent à  $x$ . L'ajout d'une arête  $y_1y_2$  à  $G$  crée par hypothèse une subdivision  $K$  d'un graphe interdit. Comme ceux-ci sont trois connexes et qu'il n'y a que les 2 passages  $x$  et  $y_1y_2$  entre  $G_1$  et  $G_2$ , les sommets de degré 3 de  $K$  sont tous dans  $G_1$  ou tous dans  $G_2$ . Mais on peut alors remplacer le chemin de  $K$  comportant l'arête  $y_1y_2$  et le sommet  $x$  par  $y_1x$  ou  $y_2x$  pour faire apparaître une subdivision d'un graphe interdit dans  $G$ . Une contradiction.

Si  $G - \{x, y\}$  n'est pas connexe alors  $xy$  est une arête de  $G$  :

sinon on peut écrire  $G = G_1 \cup G_2$  où  $G_1$  et  $G_2$  n'ont que les sommets  $x$  et  $y$  en commun. L'ajout d'une arête  $xy$  à  $G$  crée par hypothèse une subdivision  $K$  d'un graphe interdit. Comme précédemment les sommets de degré 3 de  $K$  sont tous un même  $G_i$ , disons  $G_1$ . Mais on peut alors remplacer l'arête  $xy$  dans  $K$  par un chemin reliant  $x$  et  $y$  dans  $G_2$  (qui contient nécessairement un tel chemin) faisant ainsi apparaître une subdivision d'un graphe interdit dans  $G$ . Une contradiction.

Supposons que  $G$  n'est pas 3-connexe et soient  $x, y$  deux sommets qui déconnectent  $G$ . On écrit  $G = G_1 \cup G_2$  où  $G_1$  et  $G_2$  n'ont que les sommets  $x$  et  $y$  et l'arête  $xy$  en commun. Il est facile de voir que l'ajout d'une arête à  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ) crée une subdivision d'un graphe interdit dans ce même  $G_i$ . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $G_i$  et par le lemme précédent choisir un plongement convexe de  $G_i$ . Soit alors  $z_i$  un autre sommet du cycle d'une face  $F_i$  bordée par  $x$  et  $y$  dans ce plongement. L'ajout d'une arête  $z_1z_2$  à  $G$  crée une subdivision  $K$  d'un graphe interdit. Si tous les sommets de degré 3 de  $K$  sont dans un même  $G_i$  alors on peut facilement modifier  $K$  pour qu'il se trouve dans  $G_i$ . Une contradiction. Par ailleurs  $S(G_1) \setminus S(G_2)$  ou  $S(G_2) \setminus S(G_1)$  ne contient qu'un seul sommet de degré 3 de  $K$ . Dans le cas contraire il faudrait au moins 4 chemins disjoints entre  $G_1$  et  $G_2$  dans  $G + z_1z_2$ . Pour la même raison  $K$  ne peut être qu'une subdivision de  $K_{3,3}$ . Si  $G_i$  contient les 5 autres sommets de degré 3 de  $K$  alors on obtient un plongement planaire de  $K_{3,3}$  en reliant un point intérieur à  $F_i$  aux sommets  $x, y$  et  $z_i$ . Une contradiction.  $\square$

**Corollaire 2.20** *Toute triangulation du plan (dont le cycle externe est également un triangle) est 3-connexe.*

**Preuve :** Il est facile de voir par la relation d'Euler et par double comptage des incidences face-arête que toute triangulation du plan (dont le cycle externe est également un triangle) a un nombre maximal possible d'arêtes pour un nombre fixé de sommets et est donc 3-connexe par le lemme précédent.  $\square$

Une autre formulation du théorème de Kuratowski affirme qu'un graphe est planaire si et seulement si aucun des 2 graphes interdits n'en est un *mineur*.

On pourra consulter également pour ce qui précède (en particulier pour la preuve – dans le cas polygonal – du théorème de Jordan, de la relation d'Euler et du théorème de Kuratowski) le chapitre 4 du livre de Diestel :

Graph Theory. Reinhard Diestel. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, Volume 173 July 2005 (2000, 1997).

Une copie électronique est disponible à l'adresse :

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/GraphTheoryIII.pdf>

## 2.4 Critères de planarité

Je liste ici sans preuve un certain nombre de caractérisations classiques des graphes planaires.

**Définition 2.21** *Un cycle d'un graphe  $G$  est dit induit s'il est égal au sous-graphe induit par ses sommets ou, de manière équivalente, s'il n'a pas de corde dans  $G$ . Un cycle est dit séparateur si la suppression de ses sommets déconnecte  $G$ .*

**Définition 2.22** *On appelle cycle facial tout cycle bordant une face d'un plongement, comme dans la proposition 2.8.*

Tutte [Tut63] montre que les cycles faciaux d'un plongement d'un graphe planaire sont en fait caractéristiques du graphe.

**Théorème 2.23** *Soit  $G$  un graphe 3-connexe planaire. Un cycle est facial pour un plongement de  $G$  si et seulement s'il est induit et non-séparateur dans  $G$ .*

**Définition 2.24** *Une 2-base d'un graphe  $G$  est une famille de cycles de  $G$  qui engendrent l'espace des cycles  $Z(G)$  et tel que toute arête apparaît dans au plus deux cycles de cette famille.*

**Théorème 2.25 (MacLane, 1936)** *Un graphe 2-connexe  $G$  est planaire si et seulement s'il possède une 2-base. De plus, toute 2-base est formée des cycles faciaux de  $G$  à l'exception d'un cycle, correspondant à un plongement planaire de  $G$ .*

On trouvera une preuve dans le livre de Mohar et Thomassen [MT01, p. 36].

**Définition 2.26** *Un ordre (partiel) sur un ensemble  $E$  est une relation binaire, notée  $<$ , sur  $E \times E$  qui est transitive, anti-symétrique et anti-reflexive. Si  $x < y$  ou  $y < x$  on dit que  $x$  et  $y$  sont comparables. Un ordre est linéaire, ou total, si tous les éléments de  $E$  sont comparables. La dimension d'un ordre  $<$  est le nombre minimal d'ordres linéaires tel que  $<$  est l'intersection de ces ordres.*

On peut associer à tout graphe  $G$  son ordre de complexe défini comme la relation d'inclusion sur la famille de ses sommets et arêtes.

**Théorème 2.27 (Schnyder, 1989)** *Un graphe est planaire si et seulement si la dimension de son ordre de complexe est au plus 3.*

Le *graphe de contact* d'une famille de disques du plan d'intérieurs disjoints a pour ensemble de sommets la famille de disques et pour arêtes les paires de disques en contact (donc tangents).

**Théorème 2.28 (Koebe-Andreev-Thurston)** *Un graphe est planaire si et seulement si c'est le graphe de contact d'une famille de disques.*

La section 2.8 de [MT01] est consacrée à ce théorème et ses extensions.

Un 3-polytope est une intersection bornée, et d'intérieur non-vide, de demi-espaces. Les 5 polyèdres de Platon en sont des exemples célèbres. Le graphe d'un 3-polytope est son 1-squelette, c'est à dire le graphe composé des sommets et arêtes du polytope.

**Théorème 2.29 (de Steinitz)** *Un graphe est 3-connexe et planaire si et seulement si c'est le graphe d'un 3-polytope.*

On trouvera une preuve dans le livre de Ziegler [Zie95, chap. 4].

## 2.5 Plongements rectilignes

La proposition 2.17 et le lemme 2.19 montrent en particulier que tout graphe planaire admet un plongement rectiligne. Le problème du plongement rectiligne est à l'origine de nombreuses études comme l'existence de plongements dont les sommets sont à coordonnées entières, comme la recherche de la grille entière minimale pouvant contenir un tel plongement, etc. . .

Une des preuves les plus anciennes de l'existence d'un plongement rectiligne est attribuée à Fáry [Fár48] (ou à Wagner, 1936). On commence par ajouter des arêtes au graphe planaire  $G$  que l'on veut plonger tout en préservant sa planarité, et ce jusqu'à le rendre maximale-ment planaire (et donc 3-connexe). Tout plongement de  $G$  est donc une triangulation. On choisit l'un des triangles, disons  $t$ , comme face externe et l'on montre par récurrence sur le nombre de sommets que  $G$  admet un plongement rectiligne avec cette face externe fixée. On vérifie d'abord par la formule d'Euler que  $G$  a un sommet  $s$  de degré au plus 5 distinct des sommets de  $t$ . On considère le graphe  $H$  obtenu à partir de  $G - s$  en ajoutant des arêtes (au plus 2) pour trianguler le "trou" laissé par  $s$ . Par hypothèse de récurrence,  $H$  admet un plongement rectiligne avec  $t$  pour face externe. On supprime alors les (au plus 2) arêtes ajoutées et on insère  $s$  dans la face correspondante. Cette face ayant au plus 5 sommets il est facile de montrer qu'elle est étoilée, ce qui permet de positionner  $s$  et de le relier aux sommets de la face par des segments de droites intérieurs à cette face. On obtient ainsi un plongement rectiligne de  $G$ . Il ne reste plus qu'à supprimer les arêtes initialement ajoutées ayant servi à rendre  $G$  maximale-ment planaire.

Il existe une autre preuve de la proposition 2.17 due à Tutte [Tut63] et fournissant un algorithme direct de plongement rectiligne convexe. On rappelle qu'un plongement rectiligne convexe, est un plongement dont les arêtes sont des segments et dont les faces sont strictement convexes. Par la suite on omettra l'adjectif rectiligne.

Soit  $G = (S, A)$  un graphe 3-connexe planaire, et soit  $C$  un cycle facial. On associe à chaque  $a \in A \setminus A(C)$  un poids strictement positif  $\lambda_a$ . On note  $S_e$  l'ensemble des sommets de  $C$  et  $S_i = S \setminus S_e$ .

**Théorème 2.30 (Tutte, 1963)** *Pour tout plongement convexe de  $C$ , il existe un plongement unique de  $S_i$  tel que chaque sommet  $s \in S_i$  (plus précisément, son plongement) soit le barycentre de ses voisins avec les poids  $\lambda_{sv}$ , pour  $v$  voisin de  $s$ . De plus, ce plongement induit un plongement convexe de  $G$  obtenu en reliant chaque paire de sommets voisins par un segment de droite.*

La condition sur les sommets de  $S_i$  est décrite par le système :

$$\forall s \in S_i, \quad \sum_{v \in V(s)} \lambda_{sv}(s - v) = 0 \quad (2.1)$$

où  $V(s)$  désigne l'ensemble des voisins de  $s$  dans  $G$ .

Pour alléger les notations, on note  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  les sommets de  $S_i$  et  $\{s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_n\}$  ceux de  $S_e$ . On écrit également  $\lambda_{ij}$  pour  $\lambda_{s_i s_j}$  et on note  $V(i)$  les indices des voisins de  $s_i$ . On pose enfin  $\lambda_{ij} = 0$  si  $j \notin V(i)$ .

**Lemme 2.31** *Pour tout graphe connexe  $G$ , le système (2.1) admet une unique solution.*

**Preuve :** Ce système s'écrit

$$\Lambda \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j>k} \lambda_{1j} s_j \\ \vdots \\ \sum_{j>k} \lambda_{kj} s_j \end{bmatrix}$$

où

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} & -\lambda_{12} & \dots & -\lambda_{1k} \\ -\lambda_{21} & \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} & \dots & -\lambda_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{k1} & -\lambda_{k2} & \dots & \sum_{j=1}^n \lambda_{kj} \end{bmatrix}$$

Il suffit de vérifier que  $\Lambda$  est inversible.

Soit  $x \in \mathbb{R}^k$  tel que  $\Lambda x = 0$ . Soit  $x_i$  une composante de  $x$  de valeur absolue maximale. On pose  $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$ . Puisque  $(\Lambda x)_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(x_i - x_j) = 0$  et que  $\lambda_{ij}$  est strictement positif pour  $j$  voisin de  $i$  et nul sinon, on en déduit  $x_j = x_i$  pour  $j \in V(i)$ . Par connexité de  $G$ , il suit que tous les  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  sont égaux et donc nuls. On en conclut que  $\Lambda$  est inversible.  $\square$

Dans [Tar72] Tarjan explique comment faire un parcours en profondeur en temps  $O(S+A)$  d'un graphe  $G$ . On obtient un *palm tree* : C'est un arbre enraciné auquel s'ajoute des arcs connectant un sommet à un ancêtre dans l'arbre (arcs retours ou back edge). Inversement

tout palmier peut s'obtenir à partir d'un parcours en profondeur. On indexe les sommets dans l'ordre préfixe par leur date de première visite. Pour tout sommet  $s$ , on définit  $L(s)$  comme le sommet d'indice minimal parmi  $s$  lui-même et les têtes des arcs retours ayant pour origine des descendants de  $s$ .

On note  $T$  un arbre de parcours en profondeur de  $G$ , orienté de la racine vers les feuilles.

**Lemme 2.32** *Si  $vw$  est un arc de  $T$  et  $v \neq 1$  alors  $L(w) \geq v$  implique  $v$  est un sommet d'articulation (cut vertex) de  $G$ .*

**Preuve :** On note  $T_w$  le sous-arbre de  $T$  de racine  $v$ . Alors tout chemin d'origine  $w$  ne passant pas par  $v$  reste dans  $T_w$  : où bien on emprunte une arête de  $T$  et on aboutit à un descendant de  $w$  (y compris  $w$ ), ou bien on emprunte une arête retour et on aboutit également à un descendant de  $w$  (y compris  $w$ ) par l'hypothèse  $L(w) \geq v$ . En particulier  $v$  déconnecte  $T_w$  des ancêtres de  $v$ .  $\square$

**Lemme 2.33** *Tout chemin  $p$  de  $G$  contient un ancêtre (relativement à  $T$ ) commun à ses extrémités.*

**Preuve :** Soit  $H$  le plus petit sous arbre de  $T$  contenant les sommets de  $p$  et soit  $u$  la racine de  $H$ . On peut supposer que  $p$  contient au moins 2 sommets et considérer un sommet  $v$ , enfant de  $u$  dans  $H$ . On note  $H_v$  le sous-arbre de  $H$  de racine  $v$ . Si  $H_v = H - u$  alors  $u$  est de degré 1 dans  $H$  et  $u$  est un sommet de  $p$  par minimalité de  $H$ . Sinon  $p$  contient un arc connectant un sommet de  $H_v$  à son complémentaire dans  $H$ . Cet arc ne peut être un arc de  $T$ . C'est donc un arc retour. Sa tête est nécessairement  $u$  qui est l'unique sommet de  $H - H_v$  qui soit un ancêtre d'un sommet de  $H_v$ . Dans tous les cas,  $p$  contient  $u$  qui est un ancêtre commun des extrémités de  $p$  (et même de tous ses sommets).  $\square$

**Lemme 2.34** *Si  $G$  est 2-connexe et  $vw$  est un arc de l'arbre de recherche en profondeur alors  $v \neq 1$  implique  $L(w) < v$  et  $v = 1$  implique  $L(w) = 1$ .*

Voir les articles de TGGT 2008. En particulier par Haeupler and Tarjan.