Chapitre 6

Homotopie

6.1 Version continue

Soit X un espace topologique connexe par arcs et $x \in X$.

Un *lacet* de X de point base x est une application continue $f : [0,1] \to X$ telle que $f(0) = f(1) = x$. On note 1_x le lacet constant ($\forall t \in [0,1] : 1_x(t) = x$).

Une *homotopie* (à point base) entre deux lacets f et g est une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que $H(0,.) = f$, $H(1,.) = g$ et $H(.,0) = H(.,1) = x$. On dit alors que f et g sont *homotopes*. La *classe d'homotopie* d'un lacet est l'ensemble des lacets qui lui sont homotopes.

La *concaténation* de deux lacets f et g est le lacet

$$f.g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ g(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On vérifie aisément que pour tous lacets f_0, f_1, g_0, g_1 :
– les lacets f_0, $f_0.1_x$ et $1_x.f_0$ sont homotopes,
– le lacet $f_0.f_0^{-1}$ est homotope au lacet constant,
– si f_0 est homotope à f_1 et g_0 est homotope à g_1 alors $f_0.g_0$ est homotope à $f_1.g_1$.
On en déduit que l'ensemble des classes d'homotopie de lacets de point base x forme un groupe pour la loi de concaténation (modulo l'homotopie) ; son élément neutre est la classe du lacet constant. Ce groupe est appelée le *groupe fondamental* de X et noté $\pi_1(X,x)$.

Exercice 6.1.1 *Montrer, en utilisant la connexité par arc de X, que pour tout $x, y \in X$, les groupes $\pi_1(X,x)$ et $\pi_1(X,y)$ sont isomorphes.*

Le groupe fondamental d'un espace peut être commutatif ou non, fini ou non. Pour la plupart des espaces rencontrés, ce groupe est cependant de type fini (i.e., engendré par une famille finie d'éléments). Dans la pratique le *calcul* du groupe fondamental d'un espace revient à déterminer une famille génératrice et à fournir les *relations* entre ces générateurs qui permettent de reconstituer entièrement le groupe. Ces relations expriment l'identité entre l'élément neutre et certains produits de générateurs et de leurs inverses. une telle représentation d'un groupe, par générateurs et relations, est dite *combinatoire*.

Par exemple le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ admet une représentation combinatoire avec un unique générateur et une unique relation exprimant que la puissance p-ième de ce générateur est l'identité. On note cette représentation sous la forme

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =< g \,|\, g^p = 1 >$$

6.1.1 Représentation combinatoire des groupes

On explicite la notion de représentation combinatoire.

Soit G un ensemble de symboles. On note G^{-1} l'ensemble des symboles de G affublés du signe $^{-1}$. Intuitivement les symboles de G^{-1} représentent les inverses des symboles de G dans un certain groupe. On définit une relation d'équivalence sur les mots formés à partir des symboles de $G \cup G^{-1}$: deux mots sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite d'ajouts ou de suppressions de sous-mots de la forme $g.g^{-1}$ ou $g^{-1}.g$ où $g \in G$. On vérifie que la loi de concaténation sur les mots est compatible avec cette relation d'équivalence.

À partir de G on construit un groupe appelé le *groupe libre* sur G. Il est noté $L(G)$. C'est l'ensemble des mots sur l'alphabet $G \cup G^{-1}$ modulo la relation d'équivalence précédente et muni de la loi de concaténation. Son élément neutre est le mot vide.

Soient u, w deux éléments de $L(G)$. Le *conjugué* de w par u est l'élément $u^{-1}.w.u$ de $L(G)$. Si R est une partie de $L(G)$, le *sous-groupe distingué engendré par* R est le sous-groupe $C(R)$ de $L(G)$ constitué des éléments de R, de leurs inverses, de tous leurs conjugués (par des éléments de $L(G)$) et des produits de tels éléments. Dit autrement, $C(R)$ est le plus petit sous-groupe distingué de $L(G)$ contenant R.

On peut maintenant définir formellement la notion de représentation combinatoire : le groupe de représentation combinatoire

$$< G \,|\, R >$$

est le groupe quotient $L(G)/C(R)$. Intuitivement, c'est l'ensemble des mots sur $G \cup G^{-1}$, où l'on identifie deux mots si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations du type

1. ajout ou suppression de sous-mots de la forme $g.g^{-1}$ ou $g^{-1}.g$ où $g \in G$,
2. ajout ou suppression de mots de R ou de leurs inverses.

Exercice 6.1.2 *en admettant si besoin un nombre infini de générateurs ou de relations, montrer que tout groupe admet une représentation combinatoire.*

Un des outils fondamentaux pour le calcul effectif du groupe fondamental est le théorème de Seifert-van Kampen qui permet de calculer le groupe fondamental d'un espace à partir d'une décomposition de cet espace en morceaux. Voir Massey [Mas77] pour une excellente introduction au groupe fondamental et ses applications.

Lorsque les espaces étudiés sont triangulés, une approche purement combinatoire du groupe fondamental peut s'avérer plus simple. Bien entendu, la définition combinatoire du groupe fondamental dans ce qui suit est isomorphe à celle qu'on obtient dans le cas continu. En particulier, cette définition donne des résultats isomorphes pour des triangulations combinatoirement équivalentes. La démonstration de l'équivalence entre continu est combinatoire fait intervenir de la topologie générale et peut être assez fastidieuse, mais elle ne recèle pas de difficultés particulières.

6.2 Version combinatoire

6.2.1 Le groupe fondamental des graphes

On considère un graphe connexe $G = (S, A, o, ^{-1})$.

Définition 6.2.1 *Un* chemin *de G est une suite finie d'arcs $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, éventuellement vide si $n = 0$, telle que la destination de e_i coïncide avec l'origine de e_{i+1}. Un* lacet *(combinatoire) ou* chemin fermé *de G est un chemin dont l'origine coïncide avec le sommet terminal. On appelle* (point) base *cette origine. Le chemin vide est un lacet de point base indéterminé. La* taille *d'un chemin (lacet) γ, notée $|\gamma|$, est son nombre d'arcs. L'*inverse *du chemin $\gamma = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est le chemin $\gamma^{-1} = ({e_n}^{-1}, \dots, {e_2}^{-1}, {e_1}^{-1})$.*

Définition 6.2.2 *Un chemin est* réduit *s'il ne contient pas de sous-chemin de la forme (e, e^{-1}). Une* réduction élémentaire *est la suppression dans un chemin, d'un sous-chemin de la forme (e, e^{-1}).*

Les réductions élémentaires engendrent une relation d'équivalence sur les chemins de G. On appelle *homotopie* cette relation. Par une caractérisation fondamentale des groupes libres, chaque classe d'homotopie contient un unique chemin réduit. Un lacet homotope au lacet vide est dit *homotope à un point* ou *contractile* (par anglicisme ?).

Proposition 6.2.3 *Soit x un sommet de G. L'ensemble des classes d'homotopie de lacets de base x forme un groupe pour la loi de concaténation, noté $\pi_1(G, x)$.*

Soit T un arbre couvrant de G, et soit x un sommet de T. On associe à tout arc e de T, le lacet
$$\gamma_e^T = \gamma_{x,o(e)}^T.e.\gamma_{o(e^{-1}),x}^T$$
où $\gamma_{u,v}^T$ est l'unique chemin réduit de u à v dans T.

On note E' l'ensemble des cordes de T dans G.

On vérifie aisément que tout lacet $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de point base x dans G est homotope au lacet $\gamma_{e_1}^T.\gamma_{e_2}^T.\dots\gamma_{e_n}^T$. De plus, pour tout arc e de T, γ_e^T est homotope au lacet constant.

On en déduit que $\pi_1(G, x)$, est engendré par les γ_e^T, avec e (munie de son orientation par défaut) dans E'. Clairement, puisque chaque arête de E' apparaît une unique fois dans les lacets de la famille $\{\gamma_e^T\}_{e \in E'}$, cette famille ne vérifie aucune relation non triviale et engendre de ce fait librement $\pi_1(G, x)$. On en conclut que

Théorème 6.2.4 $\pi_1(G, x)$ *est isomorphe au groupe libre engendré par les cordes de tout arbre couvrant de* G.

6.2.2 Le groupe fondamental des surfaces

On considère une surface triangulée connexe $\mathcal{M}$. On notera respectivement S, A et F ses ensembles de sommets, arêtes et faces.

Définition 6.2.5 *Un* chemin *(resp. lacet)* γ *de* $\mathcal{M}$ *est un chemin (resp. lacet) de son 1-squelette. Une* homotopie élémentaire *de* γ *est soit une réduction élémentaire (suppression de* $e.e^{-1}$*) soit la suppression dans* γ *d'un sous-chemin* (a, b, c) *qui borde un triangle de* $\mathcal{M}$. *Ce dernier type d'homotopie élémentaire est dit* facial.

Les homotopies élémentaires engendrent une relation d'équivalence sur les chemins (resp. lacets) de $\mathcal{M}$ appellée *homotopie* et notée $\sim$.

Proposition 6.2.6 *Soit* x *un sommet de* $\mathcal{M}$. *L'ensemble des classes d'homotopie de lacets de base* x *forme un groupe pour la loi de concaténation, noté* $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ *et appelé le groupe fondamental de* $(\mathcal{M}, x)$.

Exercice 6.2.7 *Soient* x *et* y *deux sommets d'une surface triangulée connexe* $\mathcal{M}$. *Montrer que* $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ *et* $\pi_1(\mathcal{M}, y)$ *sont isomorphes. On notera* $\pi_1(\mathcal{M})$ *la classe des groupes fondamentaux de* $\mathcal{M}$ *à isomorphisme près.*

Par définition tout lacet de $\mathcal{M}$ est un lacet de son 1-squelette $\mathcal{M}^1$. Si T est un arbre couvrant de $\mathcal{M}^1$, on en déduit que les lacets γ_e^T (relativement au point base x) où e parcourt l'ensemble E' des cordes de T, génèrent $\pi_1(\mathcal{M}, x)$. On note E'^{-1} l'ensemble des inverses de E' et $L(E')$ le groupe libre engendré par les cordes de T.

Considérons maintenant pour chaque face f de $\mathcal{M}$, la trace $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ sur l'ensemble $E' \cup E'^{-1}$ du bord de l'une des deux orientations de f (ici f est un triangle, donc $k \leq 3$). On associe à f l'élément r_f de $L(E')$, appelé *relation faciale* (relativement à E') :

$$r_f = e_1.e_2 \ldots e_k.$$

Bien évidemment, si e_i se trouve être l'inverse d'une corde, il doit être interprété comme $(e_i^{-1})^{-1}$. Notons également que la trace de f ci-dessus étant définie à permutation cyclique près, r_f est définie à conjugaison (et inverse pour le choix de l'orientation de f) près dans $L(E')$.

Proposition 6.2.8 *Soit T un arbre couvrant du 1-squelette de la surface $\mathcal{M}$. On note E' l'ensemble des cordes de T, et $\{r_f\}_{f\in F}$ l'ensemble des relations faciales de $\mathcal{M}$ relativement à E'. Alors $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ est isomorphe à la représentation combinatoire*

$$< E' \,|\, \{r_f\}_{f\in F} >$$

Preuve : On considère le morphisme $\gamma : L(E') \to \pi_1(\mathcal{M}, x)$ qui associe à une corde e la classe d'homotopie de γ_e^T. Ce qui précède indique que γ est surjectif. Il suffit donc de montrer que $\ker\gamma$ est égal au sous-groupe distingué, R, engendré par les relations faciales. Pour $w = e_1 \dots e_n \in L(E')$ on note $\Gamma(w) = \gamma_{e_1}^T \dots \gamma_{e_n}^T$ le *lacet* obtenu par concaténation des $\gamma_{e_i}^T$, de sorte que $\gamma(w)$ est la classe d'homotopie de $\Gamma(w)$. On note également $\sim$ la relation d'homotopie dans $\mathcal{M}$ et $\sim_1$ la relation d'homotopie dans son 1-squelette, i.e. en restreignant les homotopies élémentaires aux réductions élémentaires.

Pour toute relation faciale r_f, on a $\Gamma(r_f) \sim_1 c.\partial f.c^{-1}$ où c est un chemin d'approche dans T de x vers un sommet de f. On en déduit $\Gamma(r_f) \sim 1$ par définition de l'homotopie dans $\mathcal{M}$, puis $R \subset \ker\gamma$. Réciproquement, on veut montrer que $\Gamma(r) \sim 1$ implique $r \in R$. Ceci permet effectivement de conclure $\ker\gamma \subset R$ et donc $\ker\gamma = R$. Pour cela, on raisonne par récurrence sur le nombre d'homotopies élémentaires faciales permettant de transformer $\Gamma(r)$ en le lacet constant. Le cas de base, $\Gamma(r) \sim_1 1$ implique $r = 1$ dans $L(E')$, est une conséquence du théorème 6.2.4. Sinon, on suppose que $\Gamma(r) \sim_1 u.\partial f.v$ où uv se réduit à 1 avec une homotopie élémentaire faciale de moins que $\Gamma(r)$. On a alors $\Gamma(r.\bar{v}^{-1}.r_f^{-1}.\bar{v}) \sim_1 u.\partial f.v.v^{-1}.(\partial f)^{-1}.v \sim_1 uv$, où $\bar{v}$ est la trace de v sur E'. Mais par hypothèse de récurrence, $r.\bar{v}^{-1}.r_f^{-1}.\bar{v} \in R$, i.e. $r \in R$. $\square$

Dans la pratique on peut simplifier la représentation combinatoire de la proposition ci-dessus. On note pour cela K^* un arbre couvrant du graphe d'adjacence des faces de $\mathcal{M}$. L'arborescence de faces correspondant à K^* forme un disque triangulé D. Les arêtes du bord de D s'identifient sur $\mathcal{M}$ à un sous-graphe G du 1-squelette $\mathcal{M}^1$. On note T un arbre couvrant de G ; c'est également un arbre couvrant de $\mathcal{M}^1$. Soit E' les cordes de T dans G et I les arêtes internes de D (complémentaires de G dans $\mathcal{M}^1$). D'après la proposition précédente, $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ admet la représentation combinatoire

$$< E' \cup I \,|\, \{r_f\}_{f\in F} > .$$

On supposera que les faces de $\mathcal{M}$ sont orientées de manière compatible dans D, i.e. que les orientations induites par les deux triangles incidents à chaque arête interne de D sont opposées. Pour chaque triangle f, la relation r_f correspondante s'obtient en considérant les 3 arêtes du bord de f et en ne retenant que les arêtes de I (internes à D) et de E' (celles sur le bord de D qui sont des cordes de T). Si le triangle t correspond à un sommet de degré un dans K^*, alors r_t a l'une des trois formes possibles : e, $e.a$ ou $e.a.b$ où e est l'unique arête interne de f et a, b les deux autres arêtes de t, possiblement dans E'. On en déduit que, dans le groupe $< E' \cup I \,|\, \{r_f\}_{f\in F}. >$, l'élément e est soit l'identité, soit s'exprime en fonction d'éléments de E' (puisque $e = 1$ ou $e.a = 1$ ou $e.a.b = 1$ dans le groupe). On en déduit une nouvelle représentation combinatoire de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ avec un générateur de moins :

$$< E' \cup I \setminus \{e\} \,|\, \{r'_f\}_{f\in F\setminus\{t\}} >$$

où r'_f est obtenue en remplaçant dans r_f les éventuelles occurrences de e par son expression en fonction de a et b. (Notons qu'ici il n'y a qu'un unique triangle $t' \neq t$ qui contient e). Une telle modification de la représentation combinatoire s'appelle une *transformation de Tietze*. L'arbre K'^* obtenu en supprimant le sommet t^* (dual de t) de K^* est un arbre couvrant sur $F \setminus \{t\}$.

En supprimant récursivement les triangles correspondant à des sommets de degrés un dans l'arbre dual sur les triangles restants, on élimine ainsi tous les générateurs dans I. Il est facile de voir qu'il ne reste à la fin qu'une unique relation obtenue en prenant la trace sur E' du bord de D. On a vu que si $\mathcal{M}$ est orientable sans bord, de genre g, alors E' contient $2g$ cordes qui apparaissent chacune deux fois sur le bord de D. On a ainsi montré que les lacets $\{\gamma_e^T\}_{e\in E'}$ forment une famille génératrice de $\pi_1(\mathcal{M}_g, x)$. Plus précisément,

Proposition 6.2.9 *Le groupe fondamental de $\mathcal{M}_g$ admet une représentation combinatoire composée des $2g$ générateurs $\{\gamma_e^T\}_{e\in E'}$ et d'une unique relation de longueur $4g$.*

On peut montrer, via la classique classification des surfaces (cf. [Sti93] ou [Mas77]), que l'unique relation peut prendre la forme *canonique*

$$a_1.b_1.a_1^{-1}.b_1^{-1}.a_2.b_2.a_2^{-1}.b_2^{-1}\ldots a_g.b_g.a_g^{-1}.b_g^{-1}$$

où $a_1, b_1, \ldots a_g, b_g$ sont les cordes de T dans G avec les notations ci-dessus.

Comme pour le calcul de l'homologie, on peut en fait travailler avec des subdivisions dont les faces sont des polygones à plus (ou moins) de trois côtés. En se ramenant à une subdivision n'ayant qu'un seul sommet et une seule face, la proposition précédente devient évidente.

Par ailleurs la famille génératrice $\{\gamma_e^T\}_{e\in E'}$ ci-dessus est en fait de taille minimale.

Proposition 6.2.10 *Toute famille génératrice de $\pi_1(\mathcal{M}_g, x)$ contient au moins $2g$ éléments.*

Preuve : On remarque que la relation d'homotopie est compatible avec celle d'homologie. Donc deux lacets homotopes sont homologues (plus précisément les 1-cycles associés sont homologues. Ces 1-cycles sont obtenues en remplaçant la concaténation d'arêtes par une somme). On en déduit que la classe d'homologie de tout cycle simple s'exprime à partir des classes d'homologie d'une famille génératrice de $\pi_1(\mathcal{M}_g, x)$. Par conséquent ces classes d'homologies engendrent $H_1(\mathcal{M}_g) = \mathbb{R}^{2g}$. Mais toute famille génératrice de $\mathbb{R}^{2g}$ a au moins $2g$ vecteurs. □

On appelle *base* de $\pi_1(\mathcal{M}_g, x)$ une famille génératrice de taille minimale. Les lacets d'une base construite comme ci-dessus vérifient une relation obtenue en prenant la trace sur E' du bord de D. En effet, on obtient par concaténation des lacets correspondant un lacet qui borde un disque, donc contractile.