Chapitre 9

Théorie de Morse discrète

La théorie de Morse discrète a été introduite par Robin Forman [For98] à la fin des années 1990. Elle s'applique à l'étude des complexes simpliciaux ou plus généralement des CW-complexes. Forman met particulièrement en valeur l'analogie entre théorie de Morse classique sur les variétés différentielles et théorie discrète. Des exposés purement combinatoires apparaissent par le suite dans D. Kozlov [Koz08, chap. 11] et J. Jonsson [Jon08, chap. 4] par exemple. On s'en tiendra ici à une présentation combinatoire dans le cas simplicial.

Dans ce qui suit on écrira $a \prec b$ dans un ensemble (partiellement) ordonné si $a \leq c \leq b \implies c \in \{a, b\}$ et si $a < b$. On écrira également $b \succ a$ pour $a \prec b$.

9.1 Fonction de Morse discrète et champ vecteurs discret

Soit K un complexe simplicial fini. Une *fonction de Morse discrète* est une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ telle que pour tout simplexe $\sigma \in K$, on a $f(\rho) \geq f(\sigma)$ pour au plus une facette $\rho \prec \sigma$ et $f(\tau) \leq f(\sigma)$ pour au plus une cofacette $\tau \succ \sigma$. On vérifie aisément (exercice) qu'on ne peut avoir simultanément $f(\rho) \geq f(\sigma) \geq f(\tau)$ si $\rho \prec \sigma \prec \tau$. Il suit que l'on peut associer à f un ensemble de couples (σ, τ) avec $\sigma \prec \tau$ et $f(\sigma) \geq f(\tau)$ tel que chaque simplexe apparaît dans au plus un couple. On appelle *champ de vecteur discret* associé à f l'ensemble de ces couples. Un simplexe est dit *régulier* s'il est accouplé, et *critique* sinon. Intuitivement, les couples du champ représentent le gradient de f et les simplexes critiques correspondent à un gradient nul.

Exercice 9.1.1 *Montrer que si f est une fonction de Morse et si $\rho \prec \sigma \prec \tau$ dans K, alors on ne peut avoir $f(\rho) \geq f(\sigma) \geq f(\tau)$.*

Plus généralement un *champ de vecteurs discret* sur K est un ensemble de couples de simplexes (σ, τ) avec $\sigma \prec \tau$ tel que chaque simplexe apparaît dans au plus un couple. Étant donné un champ de vecteurs[1] V, on considère le graphe orienté H_V sur K dont

1. Aucune confusion n'étant possible, on omet l'adjectif discret dans la suite.

les arcs sont les couples $(\sigma, \tau) \in V$ et les couples (τ, σ) tels que $(\sigma, \tau) \notin V$ et $\sigma \prec \tau$. Dit autrement, H_V est le diagramme de Hasse de K pour la relation d'inclusion, orienté de façon décroissante, dont on a ensuite inversé l'orientation des arcs correspondant aux couples de V.

Définition 9.1.2 *Le champ V est dit* acyclique *si H_V est sans cycle. Tout chemin (orienté) dans H_V reliant deux simplexes dont les dimensions diffèrent d'au plus un est appelé une* ligne de champ. *Ainsi, H_V est acyclique si et seulement si V n'a pas de ligne de champ fermée.*

Puisque chaque simplexe apparaît dans au plus un couple de V, la dimension des simplexes ne peut diminuer deux fois de suite le long d'une ligne de champ. Il suit que les dimensions des simplexes dans une ligne de champ diffèrent d'au plus un.

Lemme 9.1.3 *Le champ associé à une fonction de Morse est acyclique.*

Preuve : Soit f une fonction de Morse sur K et $\sigma_1 \prec \tau_1 \succ \sigma_2 \prec \tau_2 \succ \ldots \succ \sigma_n \prec \tau_n$, $n \geq 2$, une ligne du champ associée à f. En particulier σ_i est accouplé à τ_i. Par définition d'une fonction de Morse on a ainsi $f(\sigma_1) \geq f(\tau_1) > f(\sigma_2) \geq f(\tau_2) > \ldots > f(\sigma_n) \geq f(\tau_n)$. Par conséquent $\sigma_1 \neq \sigma_n$ et il ne peut y avoir de ligne de champ fermée pour f. $\square$

Théorème 9.1.4 *Un champ V sur K est acyclique si et seulement s'il existe une extension linéaire L de l'inclusion sur K telle que pour tout $(\sigma, \tau) \in V$ on a $\sigma \prec_L \tau$, i.e. σ et τ sont consécutifs dans L.*

Preuve : Par récurrence sur le nombre de simplexes de K. C'est évident si K est réduit à un sommet. Sinon, on considère l'ensemble $U \subset K$ des simplexes de dimension maximale. S'il existe un simplexe critique $\tau \in U$, alors par récurrence il existe une extension linéaire L' de l'inclusion sur le complexe $K - \tau$ telle que $(\rho, \sigma) \in V \implies \rho \prec_{L'} \sigma$. On en déduit L en ajoutant τ à L' comme plus grand élément. Sinon, tous les simplexes de U sont réguliers. Soit D l'ensemble des simplexes accouplés aux simplexes de U. J'affirme qu'il existe un simplexe $\sigma \in D$ accouplé à un simplexe $\tau \in U$ tel que τ est l'unique coface de σ dans K. Dans le cas contraire, il existerait un cycle dans H_V, contredisant l'acyclicité de V, car tout simplexe $\pi \in U$ serait relié dans H_V à un autre simplexe $\pi' \in U$ par un chemin $\pi \prec \rho \succ \pi'$ avec $(\pi, \rho) \in V$. Par récurrence, il existe une extension linéaire L' de l'inclusion sur le complexe $K - \{\sigma, \tau\}$ vérifiant les conditions du théoreme. On définit alors L en ajoutant σ à L' comme plus grand élément, puis en ajoutant τ comme successeur de σ. $\square$

9.2 Théorie de Morse algébrique

Soient $\sigma \prec \tau$ dans K. Intuitivement on peut effondrer τ en déformant σ sur $\partial\tau - \sigma$ de manière à obtenir un complexe cellulaire homotopiquement équivalent à K et dont les cellules sont en correspondance avec celles de $K - \{\sigma, \tau\}$. Si V est un champ acyclique sur K, alors le théorème 9.1.4 permet d'ordonner les couples de V et de les effondrer les uns après les autres pour obtenir un complexe cellulaire K_V ayant le type d'homotopie de K et dont les cellules sont en correspondance avec les simplexes critiques de K pour V. De fait, on peut définir un opérateur bord sur K_V de sorte que le complexe de chaînes associé ait la même homologie que K. C'est le résultat principal de la théorie de Morse discrète.

On considère de manière générale un complexe de chaînes libre

$$C_* = \cdots \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$$

possédant une base B indéxée par K. Dit autrement, chaque C_n est un $\mathbb{Z}$-module libre affecté d'une base indexée par les simplexes de dimension n de K, et B est la réunion de ces bases. [2]

Si $e_\sigma, e_\tau \in B$, on note $d_{\tau,\sigma}$ le coefficient de e_σ dans l'expression de ∂e_τ sur B. Ainsi,

$$\partial e_\tau = \sum_{\sigma \in K} d_{\tau,\sigma} e_\sigma \tag{9.1}$$

En particulier, $\dim \sigma \neq \dim \tau - 1$ implique $d_{\tau,\sigma} = 0$. On obtient un ordre partiel $<_B$ sur B par fermeture transitive de la relation $\sigma \prec_B \tau$ si $d_{\tau,\sigma} \neq 0$.

Un *champ acyclique* pour (C_*, B) est un champ acyclique V pour K tel que [3] $(\sigma,\tau) \in V \implies d_{\tau,\sigma} = \pm 1$. On considère le graphe orienté H_V ayant K pour ensemble de sommets et pour arcs l'ensemble $V \cup \{(\tau,\sigma) \mid \sigma \prec_B \tau \text{ et } (\sigma,\tau) \notin V\}$. Ainsi, lorsque ∂ s'identifie à l'opérateur bord dans K, H_V s'identifie au graphe associé à V dans la section 9.1. Soit $c = \tau \succ_B \sigma_1 \prec_B \tau_1 \succ_B \sigma_2 \prec_B \tau_2 \succ_B \cdots \succ_B \sigma_n \prec_B \tau_n \succ_B \sigma$ un chemin de H_V. On définit le poids de c comme le quotient

$$p(c) = (-1)^n d_{\tau,\sigma_1} (\prod_{i=1}^{n-1} d_{\tau_i,\sigma_{i+1}}) d_{\tau_n,\sigma} / (\prod_{i=1}^{n} d_{\tau_i,\sigma_i}) \tag{9.2}$$

Si $n = 0$ la formule se réduit à $p(c) = d_{\tau,\sigma}$. Pour $\dim \tau = \dim \sigma + 1$, on note $\mathcal{C}^V_{\tau,\sigma}$ l'ensemble des chemins de H_V joignant τ à σ. On pose $\mathcal{C}^V_{\tau,\sigma} = \emptyset$ sinon.

Définition 9.2.1 *Un* complexe de Morse (C^V_*, B^V) *associé à* V *est un complexe de chaînes libre*

$$C^V_* = \cdots \xrightarrow{\partial} C^V_n \xrightarrow{\partial} C^V_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$$

où chaque C^V_n *est un sous-module de* C_n *possédant une base* $B^V_n = \{\ldots, e^V_\sigma, \ldots\}$ *indéxée par les* n*-simplexes critiques pour* V *de sorte que*

$$\partial e^V_\tau = \sum_{\sigma \in K \setminus V} (\sum_{c \in \mathcal{C}^V_{\tau,\sigma}} p(c)) e^V_\sigma \tag{9.3}$$

où $K \setminus V$ *désigne l'ensemble des simplexes non-accouplés dans* V.

2. Dans ce qui suit on utilise uniquement le fait que K est un *ensemble* gradué (une union disjointe de K_n) et la notion de dimension est juste celle de graduation. On garde cependant la terminologie de complexe simplicial, car c'est l'application essentielle de cette théorie.

3. De manière générale on peut considérer pour C_* un complexe de modules sur un anneau quelconque. Dans ce cas on demande que $d_{\tau,\sigma}$ soit une unité dans l'anneau.

Si $(\sigma,\tau) \in V$, on note $\mathbb{I}(\tau,\sigma)$ le complexe de chaînes

$$\cdots 0 \to \mathbb{Z}e_\tau \overset{e_\tau \mapsto e_\sigma}{\to} \mathbb{Z}e_\sigma \to 0 \to \cdots$$

$\mathbb{I}(\tau,\sigma)$ est donc isomorphe au complexe de chaînes $\cdots 0 \to \mathbb{Z} \overset{Id}{\to} \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$ où la flèche identité relie les modules d'indices $\dim\tau$ et $\dim\sigma$. Le théorème principal de la théorie de Morse discrète affirme que l'homologie de C_* est isomorphe à celle de tout complexe de Morse.

Théorème 9.2.2 *Si V est champ acyclique pour (C_*, B) alors C_* est isomorphe à $C_*^V \oplus \bigoplus_{(\sigma,\tau)\in V} \mathbb{I}(\tau,\sigma)$.*

Dit autrement C_* admet une base $B' = (\ldots, e'_\lambda, \ldots)$ telle que

$$\partial e'_\mu = \begin{cases} e'_\lambda & \text{si } (\lambda,\mu) \in V \\ \sum_{\lambda\in K\setminus V} \sum_{c\in\mathcal{C}^V_{\mu,\lambda}} p(c) e'_\lambda & \text{si } \mu \notin \{V\} \end{cases}$$

Preuve du théorème : On raisonne par récurrence sur le $|V|$. Supposons d'abord V vide. Si $\dim\tau = \dim\sigma + 1$ alors ou bien $d_{\tau,\sigma} = 0$ et il n'y a pas de chemin reliant τ à σ dans H_V, ou bien $d_{\tau,\sigma} \neq 0$ et $\tau \succ_B \sigma$ est l'unique chemin reliant τ à σ dans H_V. L'expression de ∂ dans l'équation (9.3) coïncide donc avec l'équation (9.1) et C_*^V est bien isomorphe C_*.

Si V n'est pas vide, le théorème 9.1.4 légèrement adapté fournit une extension linéaire L de $<_B$ telle que $(\lambda,\mu) \in V \implies \lambda \prec_L \mu$. Soit alors $(\sigma,\tau) \in V$ tel que τ est maximal pour L parmi les simplexes accouplés dans V. On pose $V' = V - (\sigma,\tau)$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $B' = (\ldots, e'_\lambda, \ldots)$ pour C_* telle que

1. $(\lambda,\mu) \in V' \implies \partial e'_\mu = e'_\lambda$
2. Pour tout μ non-accouplé dans V',

$$\partial e'_\mu = \sum_{\lambda\in K\setminus V'} d'_{\mu,\lambda} e'_\lambda \quad \text{avec } d'_{\mu,\lambda} = \sum_{c\in\mathcal{C}^{V'}_{\mu,\lambda}} p(c)$$

où $\mathcal{C}^{V'}_{\mu,\lambda}$ désigne l'ensemble des chemins de $H_{V'}$ joignant μ à λ si $\dim\mu = \dim\lambda + 1$ et $\mathcal{C}^{V'}_{\mu,\lambda} = \emptyset$ sinon. En particulier $d'_{\mu,\lambda} = 0$ si $\dim\mu \neq \dim\lambda + 1$.

Remarquons que $\tau \succ_{B'} \sigma$ est l'unique chemin de $H_{V'}$ joignant τ à σ. Sinon, on obtiendrait un cycle dans H_V, contredisant l'acyclicité de V. On en déduit $d'_{\tau,\sigma} = d_{\tau,\sigma} = \pm 1$, i.e.

$$\partial e'_\tau = d_{\tau,\sigma} e'_\sigma + \sum_{\lambda\in K\setminus V} d'_{\tau,\lambda} e'_\lambda \tag{9.4}$$

On note $\{V\}$ l'ensemble des simplexes appariés dans V. On définit une base $B'' = (\ldots, e''_\mu, \ldots)$ de C_* par

$$e''_\mu = \begin{cases} e'_\mu & \text{si } \mu \in \{V\} - \sigma \\ \partial e'_\tau = \partial e''_\tau & \text{si } \mu = \sigma \\ e'_\mu - (d'_{\mu,\sigma}/d_{\tau,\sigma}) e'_\tau & \text{si } \mu \notin \{V\} \end{cases}$$

J'affirme que

$$\partial e''_\mu = \begin{cases} e''_\lambda & \text{si } (\lambda, \mu) \in V \\ \sum_{\lambda \in K \setminus V} (d'_{\mu,\lambda} - \frac{d'_{\mu,\sigma} d'_{\tau,\lambda}}{d_{\tau,\sigma}}) e''_\lambda & \text{si } \mu \notin \{V\} \end{cases}$$

Le cas $(\lambda, \mu) \in V$ provient directement de la définition de B'' et de la propriété 1 ci-dessus pour B'. Pour le second cas on commence par calculer

$$e''_\sigma = d_{\tau,\sigma} e'_\sigma + \sum_{\lambda \in K \setminus V} d'_{\tau,\lambda} e'_\lambda = d_{\tau,\sigma} e'_\sigma + \sum_{\lambda \in K \setminus V} d'_{\tau,\lambda} e''_\lambda + \sum_{\lambda \in K \setminus V} \frac{d'_{\tau,\lambda} d'_{\lambda,\sigma}}{d_{\tau,\sigma}} e''_\tau$$

La première égalité est l'équation 9.4 et la seconde provient de la définition de B''. Chaque terme $d'_{\tau,\lambda} d'_{\lambda,\sigma}$ dans la dernière somme du membre de droite est nul pour des raisons de dimensionalité. D'où

$$e'_\sigma = \frac{1}{d_{\tau,\sigma}} e''_\sigma - \sum_{\lambda \in K \setminus V} \frac{d'_{\tau,\lambda}}{d_{\tau,\sigma}} e''_\lambda$$

On a par ailleurs pour $\mu \notin \{V\}$:

$$\partial e''_\mu = \partial e'_\mu - \frac{d'_{\mu,\sigma}}{d_{\tau,\sigma}} e''_\sigma$$

Or

$$\begin{aligned} \partial e'_\mu &= \sum_{\lambda \in K \setminus V'} d'_{\mu,\lambda} e'_\lambda = \sum_{\lambda \in K \setminus V} d'_{\mu,\lambda} e'_\lambda + d'_{\mu,\sigma} e'_\sigma + d'_{\mu,\tau} e''_\tau \\ &= \sum_{\lambda \in K \setminus V} d'_{\mu,\lambda} e''_\lambda + \sum_{\lambda \in K \setminus V} \frac{d'_{\mu,\lambda} d'_{\lambda,\sigma}}{d_{\tau,\sigma}} e''_\tau + \frac{d'_{\mu,\sigma}}{d_{\tau,\sigma}} e''_\sigma - \sum_{\lambda \in K \setminus V} \frac{d'_{\mu,\sigma} d'_{\tau,\lambda}}{d_{\tau,\sigma}} e''_\lambda + d'_{\mu,\tau} e''_\tau \end{aligned}$$

Cette dernière égalité provenant de la définition de B'' et du calcul de e'_σ ci-dessus. D'où

$$\partial e''_\mu = \sum_{\lambda \in K \setminus V} (d'_{\mu,\lambda} - \frac{d'_{\mu,\sigma} d'_{\tau,\lambda}}{d_{\tau,\sigma}}) e''_\lambda + (\sum_{\lambda \in K \setminus V} \frac{d'_{\mu,\lambda} d'_{\lambda,\sigma}}{d_{\tau,\sigma}} + d'_{\mu,\tau}) e''_\tau$$

Mais le terme en facteur de e''_τ vaut encore $\sum_{\lambda \in K \setminus V'} \frac{d'_{\mu,\lambda} d'_{\lambda,\sigma}}{d_{\tau,\sigma}}$ qui est le coefficient de e'_σ dans $\partial^2 e'_\mu = 0$ et est donc nul.

L'affirmation ci-dessus permet de conclure. En effet, remarquons que si $c \in \mathcal{C}^V_{\mu,\lambda}$ utilise l'arc $\sigma \prec_B \tau$, cet arc suit immédiatement μ, i.e. $c = \mu \succ_B \sigma \prec_B \tau \succ_B \dots$ Ceci résulte de la maximalité de (σ, τ) pour L. On en déduit

$$\mathcal{C}^V_{\mu,\lambda} = \mathcal{C}^{V'}_{\mu,\lambda} \cup (\mu \succ_B \sigma \prec_B \tau) \cdot \mathcal{C}^{V'}_{\tau,\lambda}$$

où "·" désigne la concaténation de chemins. Il suit par la formule (9.2) de poids d'un chemin que pour $\mu, \lambda \notin \{V\}$:

$$\sum_{c \in \mathcal{C}^V_{\mu,\lambda}} p(c) = d'_{\mu,\lambda} - \frac{d'_{\mu,\sigma} d'_{\tau,\lambda}}{d'_{\tau,\sigma}}$$

□

Corollaire 9.2.3 *Si V est un champ acyclique sur le complexe K, alors l'homologie de K est isomorphe à celle de tout complexe de Morse associé à V.*

Puisque tout $\mathbb{I}(\tau, \sigma)$ est acyclique, on déduit effectivement du théorème 9.2.2 que $H(C_*)$ est isomorphe à $H(C_*^V)$.