Chapitre 7

Optimisation et homotopie

7.1 Calcul d'une base optimale du π_1

7.1.1 Cas des graphes

Suivant la discussion qui précède la proposition 6.2.4, on peut construire une base libre $\{\gamma_e^T\}_{e\in E'}$ de $\pi_1(G,x)$ à partir des arêtes complémentaires d'un arbre maximal en temps proportionnel à la taille $\sum_{e\in E'}|\gamma_e^T|$ de cette base. Remarquons cependant que toutes les bases de $\pi_1(G,x)$ ne proviennent pas nécessairement d'une telle construction.

Peut-on calculer efficacement une base de taille minimale ? Existe-t-il une base minimale associée à un arbre couvrant ? Avant de répondre (positivement) à ces deux questions "géométriques", donnons un petit lemme préparatoire :

Lemme 7.1.1 *Soit L un groupe libre de rang fini n et $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une base de L. Alors pour toute base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de L, il existe une permutation σ de $[1, n]$ telle que x_i apparaît dans l'expression réduite de $u_{\sigma(i)}$ en fonction des x_j.*

Preuve : Soit f l'automorphisme de L défini par $f(x_i) = u_i$. Par passages aux quotients, f défini un automorphisme du groupe libre commutatif de rang n, $L/[L, L]$. Il suffit donc de prouver la propriété pour les automorphismes de $\mathbb{Z}$-modules de rang n. Or la matrice d'un tel automorphisme est inversible, donc de déterminant non nul. L'un des $n!$ termes de l'expression usuelle du déterminant est donc non nul, ce qui exprime précisément la propriété recherchée. □

Proposition 7.1.2 *Soit $x \in V$ un sommet d'un graphe connexe fini G, alors la base de $\pi_1(G,x)$ associée à l'arbre de tout parcours en largeur de G à partir de x est de taille minimale.*

Preuve : Soit T l'arbre d'un parcours en largeur à partir de x et soit E' l'ensemble des cordes de T dans G. Par définition de T, on a que pour tout sommet $y \in V$, la distance de x à y dans G coïncide avec cette distance dans T, i.e. avec $|\gamma_{x,y}^T|$. Pour tout $e \in E'$, on remarque donc que $\{\gamma_e^T\}$ est un lacet de point base x contenant e de taille minimale avec cette propriété.

Considérons une base B de $\pi_1(G, x)$. D'après le lemme préparatoire, les éléments de la base $B_T = \{\gamma_e^T\}_{e \in E'}$ peuvent être mis en bijection avec les éléments de B de sorte que γ_e^T apparaisse dans l'expression réduite (dans B_T) de son correspondant dans B. On en déduit que e apparaît dans tout lacet représentant ce correspondant, et la remarque précédente permet de conclure. □

Exercice 7.1.3 *Montrer, sans utiliser la notion de groupe, que parmi toutes les bases associées à des arbres couvrants, celles associées à des parcours en largeur sont de taille minimale.*

On remarquera que la proposition 7.1.2 reste vraie si on suppose que les arêtes de G sont munies de poids positifs, que la taille est remplacée par le poids total, et que le parcours en largeur est modifié par l'algorithme de Dijkstra [CLRS02].

7.1.2 Cas des surfaces

De même que pour les graphes, il est possible de calculer une base minimale du groupe fondamentale d'une surface de manière efficace. L'algorithme qui suit est tiré de Erickson et Whittlesey [EW05].

Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée orientable sans bord de genre g et x un sommet de $\mathcal{M}$. Comme pour les graphes, on commence par calculer un arbre couvrant T obtenu par un parcours en largeur. Pour toute corde e de T dans le 1-squelette $\mathcal{M}^1$, on a un lacet γ_e^T qui est le plus court lacet de base x contenant e (cf. la preuve de la proposition 7.1.2). On définit de manière récursive un *générateur glouton* $\gamma_{e_i}^T$, $i \geq 1$ par[1]

$\mathcal{M} \setminus (T \cup \{e_1, \ldots, e_i\})$ *est connexe et* $|\gamma_{e_i}^T|$ *est minimal avec cette propriété.*

Soit G_i^* le graphe dual de $\mathcal{M} \setminus (T \cup \{e_1, \ldots, e_i\})$, c'est-à-dire le graphe d'adjacence entre les faces de $\mathcal{M} \setminus (T \cup \{e_1, \ldots, e_i\})$. Dire que $\mathcal{M} \setminus (T \cup \{e_1, \ldots, e_i\})$ est connexe équivaut à dire que G_i^* est connexe. Il est facile de voir à l'aide la caractéristique d'Euler que le graphe dual G^* de $\mathcal{M} \setminus T$ possède $2g$ cycles. Il y a donc $2g$ générateurs gloutons. Ces générateurs peuvent être vus comme associés aux cordes de T dans $H = T \cup \{e_1, \ldots, e_{2g}\}$. Comme $\mathcal{M} \setminus H$ est un disque (une arborescence de triangles), on se retrouve dans la situation précédant la proposition 6.2.9, et les générateurs gloutons forment donc une base de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$, dite *gloutonne*. Les classes d'homologies des générateurs gloutons constituent également de ce fait une base de $H_1(\mathcal{M})$.

Le graphe dual G_{2g}^* de $\mathcal{M} \setminus H$ constitue un arbre couvrant K^* de G^*. On associe à chaque arête e^* de G^* le poids $|\gamma_e^T|$, longueur du lacet associé à la corde e de T primale de e^*. On remarque alors que K^* est un arbre couvrant de poids maximal dans G^*. En effet, par définition e_i^* est une arête de poids minimal et appartient à un cycle de G_{i-1}^*. Ceci donne une définition globale d'une base gloutonne.

[1]Si A est un sous-ensemble d'arêtes de $\mathcal{M}$, On désigne par $\mathcal{M} \setminus A$ la surface à bord obtenue en coupant $\mathcal{M}$ le long des arêtes de A.

Définition 7.1.4 *Fixons une base gloutonne de $(\mathcal{M}, x)$. Soit ℓ un lacet de $(\mathcal{M}, x)$. Un* facteur homologique *de ℓ (relativement à la base gloutonne fixée) est un générateur glouton qui apparaît avec un coefficient non nul dans l'expression de la classe d'homologie de ℓ sur la base gloutonne.*

Lemme 7.1.5 *Avec les notations précédentes, on a que pour toute corde e de T dans $\mathcal{M}^1$, le lacet γ_e^T est au moins aussi long que chacun de ses facteurs homologiques.*

Preuve : Si γ_e^T est un générateur glouton, il n'y a rien à montrer. Supposons que ce n'est pas le cas. Soient alors $\gamma_{e_1}^T, \dots, \gamma_{e_k}^T$ les générateurs gloutons qui ne sont pas plus long que γ_e^T. On pose $G_k = T \cup \{e_1, \dots, e_k\}$.

Si $\mathcal{M} \setminus (G_k \cup \{e\})$ est connexe, alors $k < 2g$ et par définition de k, on a que $\gamma_{e_{k+1}}^T$ est strictement plus long que γ_e^T, ce qui contredit la définition d'une base gloutonne. Donc $\mathcal{M} \setminus (G_k \cup \{e\})$ n'est pas connexe, tandis que $\mathcal{M} \setminus G_k$ l'est. Soit $\mathcal{M}'$ une des deux composantes de $\mathcal{M} \setminus (G_k \cup \{e\})$. L'arête e apparaît exactement une fois sur le bord de $\mathcal{M}'$. Lequel bord est inclus dans $G_k \cup \{e\}$. La classe d'homologie de ce bord est donc une combinaison des classes d'homologies de $\gamma_{e_1}^T, \dots, \gamma_{e_k}^T$ et γ_e^T, avec un coefficient ± 1 pour cette dernière. Comme la classe d'homologie de ce bord est nulle (c'est un bord !), on en déduit que la classe d'homologie de γ_e^T s'exprime en fonction de celles de $\gamma_{e_1}^T, \dots, \gamma_{e_k}^T$. □

Lemme 7.1.6 *Tout lacet de point base x est au moins aussi long que chacun de ses facteurs homologiques.*

Preuve : Soit ℓ un lacet de $(\mathcal{M}, x)$. On exprime la classe d'homotopie de ℓ, vu comme lacet de $(\mathcal{M}^1, x)$, dans la base libre associée aux cordes de T dans $\mathcal{M}^1$: $\ell \simeq \gamma_{a_1}^T, \dots, \gamma_{a_p}^T$. On suppose que cette expression est réduite, de sorte que chaque arête a_i apparaît nécessairement dans ℓ. Par conséquent ℓ est plus long que chaque $\gamma_{a_i}^T$. Mais tout facteur homologique de ℓ est facteur homologique de l'un des $\gamma_{a_i}^T$, et on conclut avec le lemme précédent. □

Lemme 7.1.7 *Pour toute base $\{\ell_i\}_{1 \le i \le 2g}$ de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$, il existe une permutation σ de $[1, 2g]$ telle que pour tout $i \in [1, 2g]$, le générateur glouton $\gamma_{e_{\sigma(i)}}$ est un facteur homologique de ℓ_i.*

Preuve : La preuve est essentiellement la même que pour le lemme 7.1.1. □

Les deux lemmes précédents impliquent immédiatement que

Proposition 7.1.8 *Toute base gloutonne est de longueur totale minimale parmi toutes les bases de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$.*

On remarque comme pour les graphes que la proposition reste vraie si on suppose que les arêtes de $\mathcal{M}$ sont munies de poids positifs, que la taille est remplacée par le poids total, et que le parcours en largeur est modifié par l'algorithme de Dijkstra [CLRS02].

Théorème 7.1.9 *Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée orientable sans bord de genre g ayant un nombre total n de sommets, arêtes et faces. Il existe un algorithme de complexité $O(n \log n + gn)$ qui calcule une base minimale de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$.*

Preuve : Il suffit d'après la proposition précédente de construire une base gloutonne. Pour cela on commence par calculer un arbre couvrant T de plus courts chemins à l'aide de l'algorithme de Dijkstra en temps $O(n \log n)$. On peut en temps linéaire calculer la longueur de γ_e^T pour chaque corde de T. D'après la définition globale d'une base gloutonne, il suffit ensuite de calculer un arbre couvrant K^* de poids maximal dans le graphe d'adjacence G^* des faces de $\mathcal{M} \setminus T$ muni des poids $|\gamma_e^T|$. Ceci peut se faire en temps $O(n \log n)$ par des algorithmes classiques de calcul d'arbre couvrant de poids maximal (ou minimal) [CLRS02]. Soient $\{e_1, \ldots, e_{2g}\}$ l'ensemble des arêtes primales correspondant aux cordes de K^* dans G^*, alors $\{\gamma_{e_1}, \ldots, \gamma_{e_{2g}}\}$ constitue une base gloutonne qui peut être construite en temps proportionnel à sa taille $O(gn)$. $\square$

7.2 Calculs de lacets sur les surfaces

Un bon nombre d'algorithmes et de problèmes portant sur l'homotopie des courbes sur les surfaces ont été étudiés ces dernières années. Citons :

- le test d'homotopie entre deux courbes [DS95, DG99],
- le calcul de système fondamental canonique de lacets pour l'homotopie [VY90, LPVV01],
- le calcul d'un système fondamental minimal dans sa classe d'homotopie [CdVL05],
- le calcul d'une décomposition en pantalons minimale dans sa classe d'homotopie [CdVL07],
- le calcul d'un cycle non contractile ou d'un cycle non séparateur minimal [MT01, CM05],
- le calcul d'une courbe minimale dans sa classe d'homotopie [CE06],
- le calcul d'un cycle séparateur minimal [CCdVE+08],
- etc...