Chapitre 5

Polytopes

L'étude des polytopes tire son origine au $XVIIIe$ siècle de la mécanique et plus spécifiquement de l'analyse des points d'équilibre d'une masse ponctuelle soumise à des contraintes. Cette analyse fait apparaître des inéquations linéaires en lien avec les multiplicateurs de Lagrange (1788). Au $XIXe$ siècle, le développement de l'étude des systèmes d'inéquations linéaires doit beaucoup à Fourier et fut motivée par différentes branches des mathématiques comme les probabilités ou la théorie des nombres ou encore par les théories politiques (élections) ou économiques. Cette dernière, ainsi que la théorie de jeux, fut également à la source de nombreux problèmes de programmation linéaire au XXe siècle. Dans le même temps l'étude de la convexité et de la théorie des polytopes en tant que telles s'est largement développée en mathématique.

Pour de plus amples références, voir les notes historiques dans

- Theory of Linear and Integer Programming. A. Schrijver. Wiley-Interscience, 1986.

- The Evolution of Methods of Convex Optimization. V. M. Tikhomirov. The American Mathematical Monthly. Jan. 1996, pp. 65-71.

5.1 Notations

Un vecteur colonne ou ligne est noté en caractère gras comme le vecteur $\mathbf{x}$, ses composantes x_i sont notées en caractères maigres. Les produit scalaire est noté de manière matricielle comme le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne. La notation $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ signifie que $x_i \leq y_i$ pour tout i.

Un demi-espace $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{cx} \leq c_0\}$ contenant un polytope P est dit *valide* pour P. Par extension, on dit que l'hyperplan $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{cx} = c_0\}$ est valide pour P si le demi-space $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{cx} \leq c_0\}$ est valide pour P.

Par concision j'écrirai $\{\mathbf{cx} \leq c_0\}$ pour $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{cx} \leq c_0\}$. Par abus de langage, j'identifierai un hyperplan avec son équation de sorte que je pourrai écrire $H = \{\mathbf{cx} = c_0\} = \{H(\mathbf{x}) = 0\}$ et $\{\mathbf{cx} \leq c_0\} = \{H(\mathbf{x}) \leq 0\}$

5.2 Convexité

Définition 5.1 *Une* combinaison convexe *d'une famille de n points $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ de $\mathbb{R}^d$ est un point $\mathbf{x}$ de la forme $\mathbf{x} = \sum_i t_i \mathbf{x_i}$, avec $t_i \geq 0$ et $\sum_i t_i = 1$.*

Définition 5.2 *Un ensemble X de $\mathbb{R}^d$ est* convexe *si pour tout couple de points de X le segment qui les joint est inclus dans X.*

Remarque 5.3 *Par récurrence on en déduit facilement qu'un ensemble est convexe si et seulement si il est stable par combinaison convexe de familles finies de ses points.*

Définition 5.4 *Soit X une partie de $\mathbb{R}^d$.* L'enveloppe convexe *de X, notée $Conv(X)$, est le plus petit convexe contenant X (ce qui a un sens puisque la propriété de convexité est stable par intersection).*

Lemme 5.5 *$Conv(X)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de familles finies de points de X.*

Preuve : Je note C l'ensemble des combinaisons convexes de familles finies de X. Par la remarque précédente C est convexe (une combinaison convexe de combinaisons convexes en est une) et comme C contient X on en déduit $Conv(X) \subset C$. La même remarque implique $C \subset Conv(X)$, d'où l'identité. $\square$

Lemme 5.6 (Radon) *Soit A un ensemble de $d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ alors il existe deux parties disjointes A_1 et A_2 de A telles que $Conv(A_1) \cap Conv(A_2)$ n'est pas vide.*

Preuve : Les $d+2$ points $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_{d+2}}$ de A sont affinement dépendants. Il existe donc des λ_i non tous nuls tels que $\sum_i \lambda_i \mathbf{a_i} = \mathbf{0}$ et $\sum_i \lambda_i = 0$. En séparant les termes avec des λ_i strictement positifs des termes avec des λ_i strictement négatifs on conclut facilement. $\square$

Théorème 5.7 (Carathéodory, 1911) *$Conv(X)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de familles de $d+1$ points de X. Autrement dit $Conv(X)$ est l'union des d-simplexes (possiblement dégénérés) dont les sommets sont des points de X.*

Preuve : Par le lemme 5.5 tout point $\mathbf{x}$ de $Conv(X)$ s'écrit $\sum_{i=1}^n \lambda_\mathbf{i} \mathbf{x_i}$ avec $\mathbf{x_i} \in X, \lambda_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Si $n > d+1$ alors les $\mathbf{x_i}$ sont liés et il existe des μ_i non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \mu_\mathbf{i} \mathbf{x_i} = \mathbf{0}$ et $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$. On peut choisir un réel α tel que $\lambda_i + \alpha\mu_i$ est nul pour au moins un indice i et positif sinon. Donc $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \alpha\mu_i)\mathbf{x_i}$ est combinaison convexe d'au plus $n-1$ points de X et on termine par récurrence sur n. $\square$

Lemme 5.8 (de séparation) *Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^d$ et D un convexe fermé de $\mathbb{R}^d$ disjoint de C. Alors il existe un hyperplan H les séparant strictement, i.e. tel que C et D soient respectivement contenus dans les deux demi-espaces ouverts délimités par H.*

Preuve : Supposons tout d'abord D compact. L'application distance est continue sur le compact $C \times D$ où elle atteint son minimum. Soient donc $\mathbf{x} \in C$ et $\mathbf{y} \in D$ tels que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(C, D) > 0$. On vérifie que l'hyperplan médiateur de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ convient pour H. Si D n'est pas compact on l'intersecte avec une boule B compacte suffisamment grande pour que $d(C, D \cap B) = d(C, D)$ et on se ramène au cas précédent. $\square$

Théorème 5.9 (Helly, 1923) *Soient $n > d$ et $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des convexes de $\mathbb{R}^d$ tels que l'intersection de $d+1$ quelconques de ces convexes est non vide, alors $\cap_i C_i$ est non vide.*

Preuve : On raisonne par récurrence sur n. Pour tout i on considère, par hypothèse de récurrence, un point a_i dans l'intersection des $n-1$ convexes $\cap_{j \neq i} C_j$. On obtient ainsi un ensemble de n points $\{a_1, \ldots, a_i, \ldots a_n\}$. Par le théorème de Radon on peut en extraire deux sous-ensembles disjoints A et B dont les enveloppes convexes s'intersectent. Tout point x de cette intersection est dans $\cap_i C_i$. En effet, si a_i n'est pas dans A, alors chaque point de A est dans C_i, et donc $x \in Conv(A) \subset C_i$. De même si i n'est pas dans B. $\square$

Exercice 5.10 *Soit P un ensemble de n points de $\mathbb{R}^d$. Un* point central *pour P est un point $x \in \mathbb{R}^d$ tel que tout demi-espace qui ne contient pas x contient au plus $n\frac{d}{d+1}$ points de P. Montrer à l'aide du théorème de Helly que tout ensemble fini de points admet un point central.*

5.3 Le théorème de Minkowski-Weyl

Ce théorème établit l'équivalence entre les objets obtenus comme enveloppe convexe de familles finies de points ou comme intersection de familles finies de demi-espaces lorsque celle-ci est bornée.

Définition 5.11 *Un* cône polyédrique *est une intersection d'une famille finie de demi-espaces vectoriels (de la forme $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{ax} \leq 0\}$). L'*enveloppe conique *d'une famille finie de vecteurs est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients non négatifs de ces vecteurs.*

Théorème 5.12 (de Minkowski-Weyl pour les cônes) *Tout cône polyédrique est une enveloppe conique et réciproquement.*

Lemme 5.13 *La projection sur un sous-espace d'un cône polyédrique est un cône polyédrique.*

Preuve : Une projection sur un sous-espace de codimension p s'obtient comme p projections successives sur des sous-espaces de codimension 1 (dans les espaces appropriés). Il suffit donc de se restreindre à ce dernier cas. Par changement de coordonnées on peut supposé que cette projection est la projection orthogonale sur $\{x_1 = 0\}$. Soit $C = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$

un cône polyédrique où les inéquations sont exprimées dans une repère adapté à la projection. On utilise la procédure de *Fourier-Motzkin* (1927) après avoir normalisé les inéquations de C : si C s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & + & \mathbf{a'_i x'} \leq 0,\ i \in I^+ \\ -x_1 & + & \mathbf{a'_j x'} \leq 0,\ j \in I^- \\ & & \mathbf{a'_k x'} \leq 0,\ k \in I^0 \end{array}\right.$$

alors sa projection sur $\{x_1 = 0\}$ s'écrit

$$C_1 = \left\{\begin{array}{ccc} (\mathbf{a'_i} + \mathbf{a'_j})\mathbf{x'} & \leq 0, & (i,j) \in I^+ \times I^- \\ \mathbf{a'_k x'} & \leq 0, & k \in I^0 \end{array}\right.$$

En effet, tout point projeté de C est clairement dans C_1. Par ailleurs si $\mathbf{x'} \in C_1$ alors le point $(-\max_{I^+} \mathbf{a'_i x'}, \mathbf{x'}) \in C$, donc C_1 est contenu dans la projection de C. $\square$

Lemme 5.14 *L'intersection d'une enveloppe conique avec un sous-espace est une enveloppe conique.*

Preuve : Il suffit de se restreindre à l'intersection avec un sous-espace de codimension 1, par exemple $\{x_1 = 0\}$ et de conclure par récurrence sur la codimension. Soit une enveloppe conique $E = \{R\lambda,\ \lambda \geq \mathbf{0}\}$ avec $R = (R^+, R^-, R^0)$ et $\mathbf{r} \in R^+$ (resp. R^-, R^0) si $r_1 = 1$ (resp. $-1, 0$). Alors $E \cap \{x_1 = 0\}$ est l'enveloppe conique E_1 sur $(R^+ + R^-, R^0)$. En effet,

$$\mathbf{x} \in E_1 \implies \mathbf{x} = \sum_{R^+ \times R^-} \lambda_\pm (\mathbf{r}^+ + \mathbf{r}^-) + \sum_{R^0} \lambda_0 \mathbf{r^0}$$

avec $\lambda_\pm, \lambda_0 \geq 0$. Donc $\mathbf{x} \in E \cap \{x_1 = 0\}$, i.e. $E_1 \subset E \cap \{x_1 = 0\}$.
Réciproquement,

$$\mathbf{x} \in E \cap \{x_1 = 0\} \implies \mathbf{x} = \sum_{R^+} \lambda_+ \mathbf{r}^+ + \sum_{R^-} \lambda_- \mathbf{r}^- + \sum_{R^0} \lambda_0 \mathbf{r^0}$$

avec $\sum_{R^+} \lambda_+ = \sum_{R^-} \lambda_-$ et $\lambda_+, \lambda_-, \lambda_0 \geq 0$. On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{\sum_{R^+} \lambda_+} \Big(\sum_{R^+} \lambda_+ \big(\sum_{R^-} \lambda_-\big) \mathbf{r}^+ + \sum_{R^-} \lambda_- \big(\sum_{R^+} \lambda_+\big) \mathbf{r}^-\Big) + \sum_{R^0} \lambda_0 \mathbf{r^0} \\ &= \sum_{R^+} \sum_{R^-} \frac{\lambda_+ \lambda_-}{\sum_{R^+} \lambda_+} (\mathbf{r}^+ + \mathbf{r}^-) + \sum_{R^0} \lambda_0 \mathbf{r^0}. \end{aligned}$$

d'où $\mathbf{x} \in E_1$ et $E \cap \{x_1 = 0\} \subset E_1$. $\square$

Preuve du théorème 5.12 : Soit une enveloppe conique $E = \{\mathbf{x} \mid \exists \lambda \geq \mathbf{0} : \mathbf{x} = R\lambda\}$. E est la projection "sur $\mathbf{x}$ parallèlement à λ" du cône polyédrique

$$\{ \begin{bmatrix} I & -R \\ -I & R \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \}.$$

Le lemme 5.13 assure que E est un cône polyédrique.
Réciproquement soit un cône polyédrique $C = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \lambda) \mid A\mathbf{x} \leq \lambda\} \cap \{\lambda = \mathbf{0}\}$.
Montrons que $C' = \{(\mathbf{x}, \lambda) \mid A\mathbf{x} \leq \lambda\}$ est l'enveloppe conique E des vecteurs $\pm \begin{bmatrix} \mathbf{e_i} \\ A\mathbf{e_i} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \epsilon_j \end{bmatrix}$ où les $\mathbf{e_i}$ et ϵ_j constituent des bases des espaces adéquats :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \in E \implies \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \sum_i (u_i^+ - u_i^-) \begin{bmatrix} \mathbf{e_i} \\ A\mathbf{e_i} \end{bmatrix} + \sum_j v_j \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \text{ avec } u_i^+, u_i^-, v_j \geq 0.$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} + \mathbf{v} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

On en déduit $A\mathbf{x} \leq \lambda$ i.e. $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \in C'$. Réciproquement supposons $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \in C'$. Alors on peut écrire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda - A\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^+ \\ A\mathbf{x}^+ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}^- \\ A\mathbf{x}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda - A\mathbf{x} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{x}^+, \mathbf{x}^- \geq \mathbf{0}.$$

ce qui montre que $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \in E$. Finalement $E = C'$ et $C = C' \cap \{\lambda = \mathbf{0}\}$. Le lemme 5.14 permet de conclure. □

Définition 5.15 *Un* polyèdre *est l'intersection d'un famille finie de demi-espaces affines.*

Théorème 5.16 (de Minkowski-Weyl pour les polyèdres) *Tout polyèdre est la somme (de Minkowski) d'une enveloppe convexe d'une famille finie de points et d'un cône polyédrique et réciproquement.*

Preuve : Soit un polyèdre $P = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} = \{\mathbf{x} \mid \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in C\}$ où C est le cône

$$C = \{\begin{bmatrix} x_0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{b} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}\}.$$

Dit autrement C est le cône de sommet $\mathbf{0}$ sur une copie de P dans l'hyperplan $x_0 = 1$. Le théorème de Minkowski-Weyl pour les cônes assure que $C = \{R\lambda, \lambda \geq \mathbf{0}\}$ pour un certain R vérifiant $(R\lambda)_0 \geq 0$ pour tout $\lambda \geq \mathbf{0}$. On en déduit

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in C \Leftrightarrow \exists \lambda \geq \mathbf{0} : \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \lambda_i r_{i0} \\ \sum_i \lambda_i \mathbf{r_i} \end{bmatrix}$$

où les r_{i0} sont non négatifs. En séparant les indices pour lesquels r_{i0} est soit positif soit nul en I^+ et I^0 respectivement, on obtient

$$\mathbf{x} \in P \Leftrightarrow \exists \lambda \geq \mathbf{0} : \mathbf{x} = \sum_{I^+} \lambda_i r_{i0} \frac{\mathbf{r_i}}{r_{i0}} + \sum_{I^0} \lambda_i \mathbf{r_i} \text{ et } \sum_{I^+} \lambda_i r_{i0} = 1.$$

D'où $\mathbf{x} \in Conv(\frac{\mathbf{r_i}}{r_{i0}})_{I^+} + C\hat{o}ne(\mathbf{r_i})_{I^0}$.

Pour la réciproque on considère la somme Q d'une enveloppe convexe d'une famille finie de points S et d'une enveloppe conique sur une famille R de vecteurs :
$Q = \{S\lambda + R\mu \mid \lambda, \mu \geq \mathbf{0} \text{ et } \mathbb{1}\lambda = 1\}$. Alors $Q = \{\mathbf{x} \mid \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in C\}$ où C est le cône

$$C = \{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ S & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \mid \lambda, \mu \geq \mathbf{0}\}.$$

Le théorème de Minkowski-Weyl pour les cônes assure que C est de la forme
$\{\begin{bmatrix} x_0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \mid (-\mathbf{b} \quad A) \begin{bmatrix} x_0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}\}$ d'où $P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ □

Exercice 5.17 *Le* cône de récession *du polyèdre $P = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ est l'ensemble des directions $\mathbf{y}$ telles que $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in P$ pour un certain $\mathbf{x} \in P$ et tout $\lambda \geq 0$. Montrer que le cône de récession de P est le cône $\{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$. Montrer que dans toute décomposition de P en somme d'une enveloppe convexe de points et d'un cône polyédrique, ce cône est le cône de récession de P.*

*L'*espace de linéalité *de P est l'ensemble des directions $\mathbf{y}$ telles que $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in P$ pour un certain $\mathbf{x} \in P$ et tout λ. Montrer que cet espace a pour équation $\{A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.*

Définition 5.18 *Un* polytope *est un polyèdre borné.*

Corollaire 5.19 (théorème de Minkowski-Weyl pour les polytopes) *Tout polytope est une enveloppe convexe d'une famille finie de points et réciproquement.*

5.4 Lemmes de Farkas, 1896

Lemme 5.20 *Soit un polyèdre $P = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ et soit p_i la projection sur $\{x_i = 0\}$ parallèlement à $\mathbf{e_i}$. Alors il existe une matrice C à coefficients non négatifs telle que*

$$Elim_i(P) = p_i^{-1}(p_i(P)) = \{CA\mathbf{x} \leq C\mathbf{b}\}.$$

Preuve : appliquer la procédure de Fourier-Motzkin aux inéquations de P. □

Lemme 5.21 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes*
(i) $\{A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ *est vide,*
(ii) $\exists\, \mathbf{c} \geq \mathbb{0}$ *tel que* $\mathbf{c}A = \mathbb{0}$ *et* $\mathbf{cb} < 0$.

Preuve : (i) équivaut à dire que les projections de P sont vides. En appliquant d fois le lemme 5.20, où d est la dimension de $\mathbf{x}$, on a l'existence d'une matrice C à coefficients non négatifs telle que $Elim_1(Elim_2(\dots Elim_d(P)\dots)) = \{CA\mathbf{x} \leq C\mathbf{b}\}$ est vide. Comme $CA = \mathbf{0}$ (on a projeté sur un espace de dimension 0), l'un des vecteurs lignes $\mathbf{c}$ de C vérifie (ii). □

Lemme 5.22 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes*
(i) $\nexists \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *tel que* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,
(ii) $\exists \mathbf{c}$ *tel que* $\mathbf{c}A \geq \mathbb{0}$ *et* $\mathbf{cb} < 0$.

Preuve : (i) se réécrit $\{ \begin{bmatrix} -I \\ A \\ -A \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix} \}$ est vide. Appliquer alors le lemme 5.21.
Preuve plus géométrique : (i) signifie que $\mathbf{b}$ n'est pas dans le cône des vecteurs colonnes $\mathbf{a_i}$ de A. Par le lemme de séparation 5.8 appliqué au convexe compact $\{\mathbf{b}\}$ et au convexe fermé $Cône(\{\mathbf{a_i}\})$ ceci entraîne l'existence d'un hyperplan séparateur $H = \{\mathbf{cy} = c_0\}$ tel que

$$\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0} : \mathbf{c}A\mathbf{x} > c_0 \text{ et } \mathbf{cb} < c_0.$$

En particulier $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ implique $\mathbf{cb} < c_0 < 0$. De plus on ne peut avoir $\mathbf{ca_i} < 0$ car pour $\mathbf{x}$ ayant la i-ème coordonnée positive assez grande on aurait $\mathbf{c}A\mathbf{x} < c_0$. D'où $\mathbf{c}A \geq \mathbb{0}$. $\square$

Noter que cette proposition exprime qu'un vecteur est soit dans un cône engendré par une famille finie donnée de vecteurs soit séparé de cette famille par un hyperplan. Pour une démonstration directe voir :
Theory of linear and integer programming. Alexander Schrijver. Wiley, 1986. page 85.

Lemme 5.23 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes*
(i) $\{\mathbf{ax} \leq b_0\}$ *est valide pour* $\{A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$,
(ii) $\exists \mathbf{c} \geq \mathbb{0}$ *tel que* $\mathbf{c}A = \mathbf{a}$ *et* $\mathbf{cb} \leq b_0$ *ou tel que* $\mathbf{c}A = \mathbb{0}$ *et* $\mathbf{cb} < 0$.

Dit autrement, si une inéquation est valide pour un polyèdre non vide, alors cette inéquation est impliquée par une combinaison à coefficients positifs des inéquations du polyèdre.

Preuve : (ii) $\Rightarrow$ (i) : facile.
non (ii) $\Rightarrow$

$$\nexists (c_0\, \mathbf{c}) \geq \mathbb{0} \text{ tel que } (c_0\, \mathbf{c}) \begin{bmatrix} -\mathbf{a} \\ A \end{bmatrix} = \mathbb{0} \text{ et } (c_0\, \mathbf{c}) \begin{bmatrix} -b_0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} < 0.$$

On en déduit par la proposition 5.21 :

$$\exists \mathbf{w} \text{ tel que } A\mathbf{w} \leq \mathbf{b} \text{ et } \mathbf{aw} \geq b_0.$$

On a encore non (ii) $\Rightarrow$

$$\nexists (c_0\, \mathbf{c}) \geq \mathbb{0} \text{ tel que } (c_0\, \mathbf{c}) \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbf{b} & A \end{bmatrix} = (b_0\, \mathbf{a})$$

Et on en déduit par la proposition 5.22 :

$$\exists \begin{bmatrix} y_0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \text{ tel que } \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbf{b} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \text{ et } (b_0\, \mathbf{a}) \begin{bmatrix} y_0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} < 0.$$

Selon que y_0 est positif ou nul on en déduit $\mathbf{y}$ tel que $A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}$ et $\mathbf{ay} > b_0$ ou bien $A\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$ et $\mathbf{ay} > 0$. Dans le premier cas c'est terminé, dans le second $\mathbf{w} + \mathbf{y}$ permet également de contredire (i). $\square$

Références :

- A Simple Proof of Farka's Lemma. V. Komornik. The American Mathematical Monthly. Dec. 1998, pp. 949-950.

5.5 Faces d'un polytope

Je suis fidèlement le chapitre 2 de
Lectures on Polytopes. Günter Ziegler. Springer GTM 152, 1994.

Soit P un polytope.

Définition 5.24 *Une* face *de P est soit P lui-même soit l'intersection de P avec un hyperplan valide. Un tel hyperplan est dit* support *de la face. La* dimension *d'une face est celle de son enveloppe affine. Une face de dimension 0 (resp. 1, resp. k, resp. $dim(P)-1$) est appelée* sommet *(resp.* arête*, resp.* k-face*, resp.* facette*).*

On note $V(P)$ les sommets de P.

Définition 5.25 *Un point* $\mathbf{v}$ *de P est* extrême *s'il n'est pas combinaison convexe d'autres points de P. Si $P = Conv(S)$, pour un ensemble S de points, cela équivaut d'après le lemme 5.5 à $\mathbf{v} \notin Conv(S \setminus \mathbf{v})$.*

Lemme 5.26 *Un point de P est extrême si et seulement si c'est un sommet de P.*

Preuve : Soit $P = Conv(S)$ et soit $\mathbf{v} = P \cap \{\mathbf{cx} = c_0\}$ un sommet de P. Tout point $\mathbf{x}$ de P distinct de $\mathbf{v}$ vérifie $\mathbf{cx} < c_0$, donc $\mathbf{v}$ ne peut être combinaison convexe d'autres points de P. Réciproquement, supposons que $\mathbf{v}$ est un point extrême de P, i.e. que $\mathbf{v} \notin Conv(S \setminus \mathbf{v})$. Par le lemme de séparation on en déduit un hyperplan $\{\mathbf{cx} = c_0\}$ tel que $\mathbf{cv} > c_0$ et $\mathbf{cs_i} < c_0$ pour $s_i \in S \setminus \mathbf{v}$. L'hyperplan $\{\mathbf{cx} = \mathbf{cv}\}$ est un hyperplan valide définissant le sommet $\mathbf{v}$. □

Proposition 5.27

(i) *Si P est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points, alors cet ensemble contient $V(P)$.*

(ii) *P est l'enveloppe convexe de ses sommets.*

Preuve : (i) est une conséquence directe du lemme 5.26. Soit $P = Conv(S)$. Si $\mathbf{v} \in S \setminus V(P)$, alors $P = Conv(S \setminus \mathbf{v})$ d'après la remarque 5.3 et on en déduit (ii) par récurrence sur |S|. □

Puisqu'un polytope est une intersection bornée de demi-espaces, il est clair que toute face d'un polytope est elle-même un polytope.

Proposition 5.28 *Soit P un polytope et F une face de P.*

(i) *l'intersection de deux faces de P est une face de P,*

(ii) *les faces de F sont les faces de P incluses dans F, en particulier, $V(F) = V(P) \cap F$, et*

(iii) $F = P \cap aff(F)$.

Preuve : (i) : Soit H un hyperplan support de F et soit F' une autre face de P d'hyperplan support H'. Alors toute combinaison positive de H et H' définit un hyperplan support pour $F \cap F'$.

(ii) : Soit F' une face de F d'hyperplan support H' (pour F). Il est facile de choisir un hyperplan support de F' pour P de la forme $H + \lambda H'$ avec λ tel que l'inégalité associée soit stricte pour les sommets de $V(P) \setminus V(F)$: si H' n'est pas support de P alors $\lambda = -\nu/\mu$ convient, où $\nu = \max_{\mathbf{v_i} \in V(P) \setminus V(F)} H(\mathbf{v_i})$ et $\mu = \max_{\mathbf{v_i} \in V(P)} H'(\mathbf{v_i})$. Si H' est support de P, cf. (i).

(iii) : $F \subset P \cap aff(F) \subset P \cap H = F$. □

Définition 5.29 *Soit $\mathbf{v}$ un sommet de P d'hyperplan support $H_0 = \{\mathbf{cx} = c_0\}$. Soit $c_1 < c_0$ tel que $\{\mathbf{cx} < c_1\}$ pour les sommets $V(P) \setminus \mathbf{v}$. Je note $H_1 = \{\mathbf{cx} = c_1\}$. L'*étoile *de $\mathbf{v}$ est par définition*

$$P/\mathbf{v} = P \cap H_1$$

Proposition 5.30 *L'application qui associe à toute k-face, F, de P contenant $\mathbf{v}$ la (k-1)-face $F \cap H_1$ de $P/\mathbf{v}$ est une bijection d'inverse*

$$F' \mapsto P \cap aff(F' \cup \{\mathbf{v}\}).$$

Preuve : Remarquons d'abord que $F \cap H_1$ est bien une (k-1)-face de $P/\mathbf{v}$: $F \cap H_1 = P \cap H \cap H_1 = P/\mathbf{v} \cap H$ où H est un hyperplan support de F.

L'application inverse est également bien définie : soit H' un hyperplan support d'une face F' de $P/\mathbf{v}$. Soit λ tel que $\mathbf{v} \in H' + \lambda H_1$ (ce qui est possible puisque $H_1(v) > 0$). Alors $H' + \lambda H_1$ est un hyperplan valide pour P. Pour le voir on prend $\mathbf{v}'$ dans $V(P) \setminus \mathbf{v}$ et on pose

$$\mathbf{v}'' = t\mathbf{v}' + (1-t)\mathbf{v} \text{ avec } 1 \geq t = \frac{c_0 - c_1}{c_0 - \mathbf{cv}'} > 0.$$

Alors $\mathbf{v}'' \in P \cap H_1 = P/\mathbf{v}$ et $(H' + \lambda H_1)(\mathbf{v}'') \leq 0$ donc $(H' + \lambda H_1)(\mathbf{v}') \leq 0$. De plus, si $\mathbf{v}' \in P \cap (H' + \lambda H_1)$ alors $(H' + \lambda H_1)(\mathbf{v}'') = 0$ et comme $H_1(\mathbf{v}'') = 0$, on en déduit $H'(\mathbf{v}'') = 0$. Autrement dit $\mathbf{v}'' \in F'$, d'où $\mathbf{v}' \in aff(F' \cup \{\mathbf{v}\})$ et $P \cap aff(F' \cup \{\mathbf{v}\}) = P \cap (H' + \lambda H_1)$ est bien une face de P.

Vérifions que les deux applications sont bien inverses l'une de l'autre :

$$P \cap aff((F \cap H_1) \cup \{\mathbf{v}\}) = P \cap aff(F) = F.$$

La première égalité provient du fait que tout point de F est combinaison affine de $\mathbf{v}$ et d'un point de $F \cap H_1$. On remarque en passant que $dim(F) = dim(F \cap H_1) + 1$ puisque $\mathbf{v} \notin aff(F \cap H_1)$. □

5.5.1 Terminologie

Un ensemble *partiellement ordonné*, ou *poset*, est une relation antisymétrique, transitive et réflexive sur un ensemble fini. Deux éléments en relation sont dits *comparables.* On appelle *ordre* la relation d'un poset. Si le couple (a, b) appartient à la relation d'un poset on dit que l'élément a est plus petit que l'élément b. Le poset *opposé* est défini par l'ordre inverse. Un ordre est *total* ou *linéaire* si deux éléments quelconques sont comparables. On considère ci-dessous les relations *plus grand* et *plus petit* au sens large.

Définition 5.31 *Une* chaîne *d'un poset est un sous-poset totalement ordonné. La longueur d'une chaîne est son nombre d'éléments moins un. Un intervalle $[a, b]$ entre deux éléments a et b est l'ensemble des éléments plus grands que a et plus petits que b. Une* borne inférieure *(resp. supérieure) d'une partie X d'un poset est un élément plus petit (resp. plus grand) que tout élément de X et plus grand (resp. plus petit) que tout élément ayant cette propriété. Un poset est* borné *s'il admet un plus petit élément et un plus grand élément. Un* treillis *est un poset borné tel que toute paire d'éléments admet une borne inférieure appelée* meet *($\wedge$) et une borne supérieure appelée* join *($\vee$). Un poset est* gradué *si la longueur de toute chaîne maximale dont le plus grand élément est fixé ne dépend que de cet élément. Cette longueur est alors appelée le* rang *de cet élément. Dans un treillis gradué les éléments de rang 1 sont appelés* atomes *et ceux de rang un de moins que l'élément maximal sont appelés* coatomes. *Un treillis est* atomique *(*coatomique*) si tout élément est un join (meet) d'atomes (de coatomes). Un élément b est dit* successeur *d'un élément a si l'intervalle $[a, b]$ est précisément la paire $\{a, b\}$. Le* diagramme de Hasse *d'un poset est un dessin dans le plan de sa relation successeur où les ordonnées des points représentant les éléments sont dans un ordre compatible avec l'ordre du poset.*

Exemples de treillis : les entiers de 0 à N avec la relation d'ordre usuelle. Les *treillis booléens*, B_k, i.e. les parties d'un ensemble à k éléments ordonnées par l'inclusion ($\vee = \cup$, $\wedge = \cap$). L'ensemble des diviseurs d'un entier pour la relation de divisibilité ($\vee = ppcm$, $\wedge = pgcd$).

5.5.2 Treillis des faces d'un polytope

On considère l'ensemble $\mathcal{F}(P)$ des faces de P partiellement ordonnées par l'inclusion.

Proposition 5.32

(i) *$\mathcal{F}(P)$ est un treillis gradué de longueur $dim(P)+1$ et de fonction $rang(F) = dim(F)+1$, atomique et coatomique. En particulier $F \wedge F' = F \cap F'$.*

(ii) *Tout intervalle $[G, F]$ est le treillis d'un polytope de dimension $dim(F)-dim(G)-1$.*

(iii) *(propriété du carreau) Tout intervalle $[G, F]$ de longueur 2, avec $G \subset F$, a exactement 4 éléments et son treillis est isomorphe à B_2.*

(iv) *Le treillis opposé de $\mathcal{F}(P)$ est le treillis des faces d'un polytope.*

Preuve : (i) : vide (resp. P) est un plus petit (resp. plus grand) élément pour $\mathcal{F}(P)$. D'après la proposition 5.28(i) l'intersection de deux faces est un minorant de ces faces dans $\mathcal{F}(P)$ et c'est évidemment le plus grand, ce qui définit le meet. On vérifie aisément (exercice) qu'un poset borné possédant un meet est un treillis. Vérifions que ce treillis est gradué : si $G \subsetneq F$ alors par la proposition 5.28(iii) on a $G = P \cap aff(G) \subsetneq P \cap aff(F) = F$. Donc $aff(G) \subsetneq aff(F)$ d'où $dim(G) < dim(F)$. Il suffit alors de vérifier que si $G \subset F$ avec $dim(G) < dim(F) - 1$, alors il existe une face H telle que $G \subsetneq H \subsetneq F$. Cela découle de la propriété (ii), prouvée ci-après, car $[G, F]$ est le treillis d'un polytope de dimension au moins 1, qui contient au moins un sommet, fournissant ainsi H. Les propositions 5.27(ii) et 5.28(ii) montrent que $\mathcal{F}(P)$ est atomique. Enfin (iv) permet de conclure que $\mathcal{F}(P)$ est également coatomique.

(ii) : D'après la proposition 5.28(iii), on peut supposer $F = P$. La propriété est vraie si $G = \emptyset$. Supposons $G \neq \emptyset$. Alors G a un sommet $\mathbf{v}$ par la propriété 5.27(ii) qui est un sommet de P par 5.28(ii). De plus le treillis de $P/\mathbf{v}$ est isomorphe à l'intervalle $[\mathbf{v}, P]$ par la proposition 5.30 ce qui permet de conclure par récurrence sur $dim(G)$ (ou $dim(P)$).

(iii) : Appliquer (ii), en remarquant qu'un 1-polytope est un segment.

(iv) : Le treillis opposé est le treillis du polytope polaire introduit dans la section 5.5.3 suivante. □

Définition 5.33 *Deux polytopes sont dits* combinatoirement équivalents *si les treillis de leurs faces sont isomorphes.*

Lemme 5.34 *Deux polytopes P et Q sont combinatoirement équivalents si et seulement si il existe une bijection ϕ entre $V(P)$ et $V(Q)$ qui envoie les sommets de chaque facette de P sur les sommets d'une facette de Q et réciproquement.*

Preuve : Puisque $\mathcal{F}(P)$ est atomique les faces de P s'identifient à des sous-ensembles de $V(P)$ et d'après la proposition 5.28(i) $V(F \wedge F') = V(F) \cap V(F')$. La bijection ϕ se prolonge donc en un isomorphisme entre $\mathcal{F}(P)$ et $\mathcal{F}(Q)$ en définissant $\phi(F)$ par la face de Q de sommets $\phi(V(F))$. En effet, puisque $\mathcal{F}(P)$ est coatomique, on a $F = \bigwedge_{i=1}^k F_i$ pour des facettes F_i de P. D'où $V(F) = \bigcap_{i=1}^k V(F_i)$ et $\phi(V(F)) = \bigcap_{i=1}^k \phi(V(F_i))$ soit encore $\phi(F) = \bigwedge_{i=1}^k \phi(F_i)$. Mais ceci montre que ϕ préserve l'ordre car $F' \leq F \Leftrightarrow F \wedge F' = F$. □

Lemme 5.35 *Soit $P \in \mathbb{R}^d$ un polytope de dimension d, et soit $\mathbf{y} \in P$. On a les équivalences :*

(i) $\mathbf{y}$ *n'est contenu dans aucune face propre de P,*

(ii) *aucun hyperplan valide pour P ne contient* $\mathbf{y}$,

(iii) $\mathbf{y}$ *est l'isobarycentre de $d + 1$ points de P affinement indépendants.*

Preuve : (i) $\Leftrightarrow$ (ii) car $\mathbf{y} \in H$ et H valide pour $P \Leftrightarrow \mathbf{y} \in F = P \cap H$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Si $\mathbf{y} = \frac{1}{d+1}\sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{x_i}$, où les $\mathbf{x_i}$ sont indépendants, et si H est valide pour P, alors $H(\mathbf{y}) = \frac{1}{d+1}\sum_{i=1}^{d+1} H(\mathbf{x_i}) < 0$ car (d+1) points indépendants ne peuvent être dans le même hyperplan.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \exists \alpha > 0$ tel que $\mathbf{y} + \alpha\mathbf{u} \in P$. En effet, si $P = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}\}$ alors

(ii) implique $A\mathbf{y} < \mathbf{z}$ d'où $A(\mathbf{y} + \alpha\mathbf{u}) \leq \mathbf{z}$ pour α suffisamment petit. En choisissant $\mathbf{u} = \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_d}$ ou $\mathbf{u} = -\sum_i \mathbf{e_i}$ on obtient :

$$\mathbf{y} = \frac{1}{d+1}(\mathbf{y} + \alpha(-\sum_i \mathbf{e_i}) + \sum_{i=1}^{d}(\mathbf{y} + \alpha\mathbf{e_i}))$$

pour α suffisamment petit. □

Les $\mathbf{y}$ vérifiant le lemme 5.35 sont dits *intérieurs* à P. On note $int(P)$ l'ensemble des points intérieurs à P. Si P est de dimension inférieure à d, on note $relint(P)$ les points intérieurs à P dans l'espace $aff(P)$. Dans ce cadre le lemme reste valide en remplaçant d par $dim(P)$ et (ii) par "un hyperplan valide pour P et contenant $\mathbf{y}$ contient nécessairement P".

Remarque 5.36 *Si P est non vide alors l'isobarycentre de ses sommets est dans son intérieur (relatif).*

Remarque 5.37 *D'après le lemme 5.35(i) deux faces distinctes de P ont des intérieurs relatifs disjoints. Donc P est l'union disjointe des intérieurs relatifs de ses faces.*

5.5.3 Polarité

Définition 5.38 *Soit H un hyperplan ne contenant pas $\mathbf{0}$. On appelle* polaire *de H la forme linéaire $\mathbf{c}$ telle que $H = \{\mathbf{cx} = 1\}$. Le* polaire *(ou* dual*), P^Δ, d'un ensemble $P \subset \mathbb{R}^d$ est l'ensemble des polaires des hyperplans valides pour $P \cup \mathbf{0}$, et ne contenant pas $\mathbf{0}$, soit*

$$P^\Delta = \{\mathbf{c} \mid \forall \mathbf{x} \in P, \mathbf{cx} \leq 1\}$$

On définit de manière analogue le polaire d'un ensemble de formes linéaires puis le bipolaire par

$$P^{\Delta\Delta} := (P^\Delta)^\Delta = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{cx} \leq 1 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in P \Rightarrow \mathbf{cy} \leq 1\}$$

Dit autrement, le bidual est l'intersection de tous les demi-espaces valides pour $P \cup \mathbf{0}$ (de la forme $\{\mathbf{cx} = 1\}$).

Par la suite $\mathbb{1}$ (resp. $\mathbf{1}$) désigne un vecteur ligne (resp. colonne) de 1. Si A est une matrice $d \times n$, alors $Conv(A)$ désigne l'enveloppe convexe des n vecteurs colonnes de A, vus comme des points de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 5.39 *Soient P et Q inclus dans $\mathbb{R}^d$, alors*

1. *$P \subset Q \Rightarrow Q^\Delta \subset P^\Delta$ et $P^{\Delta\Delta} \subset Q^{\Delta\Delta}$.*
2. *$P \subset P^{\Delta\Delta}$.*
3. *P^Δ et $P^{\Delta\Delta}$ sont convexes.*
4. *$\mathbf{0} \in int(P) \Rightarrow P^\Delta$ est borné, et P borné $\Rightarrow \mathbf{0} \in int(P^\Delta)$.*

5. *Si P est convexe, fermé et contient* $\mathbf{0}$*, alors* $P = P^{\Delta\Delta}$.
6. *Si $P = Conv(V)$ est un polytope alors* $P^{\Delta} = \{\mathbf{c} \mid \mathbf{c}V \leq \mathbb{1}\}$.
7. *Si $P = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{1}\}$ est borné, alors* $P^{\Delta} = Conv(A^t)$.

Preuve : 1, 2 et 3 sont faciles.
4 : $B(\mathbf{0}, r) \subset P \Rightarrow P^{\Delta} \subset B(\mathbf{0}, r)^{\Delta} = B(\mathbf{0}, 1/r)$.
5. Il suffit de montrer $P^{\Delta\Delta} \subset P$. Soit $\mathbf{x} \notin P$, alors puisque P est convexe et fermé, il existe un hyperplan séparateur entre $\mathbf{x}$ et P. Mais cela signifie précisément $\mathbf{x} \notin P^{\Delta\Delta}$.
6. Clairement un hyperplan est valide pour $P \cup \mathbf{0}$ si et seulement s'il l'est pour $V \cup \mathbf{0}$. Donc $P^{\Delta} = V^{\Delta} = \{\mathbf{c} \mid \mathbf{c}V \leq \mathbb{1}\}$.
7. Si $\mathbf{0} \in Q := Conv(A^t)$ alors, par le point 6, $Q^{\Delta} = P$ puis, par le point 5, $P^{\Delta} = Q^{\Delta\Delta} = Q$. Il suffit donc de vérifier que $\mathbf{0} \in Conv(A^t)$. Mais ceci découle du lemme de Farkas 5.21 car $\{A\mathbf{x} \leq -\mathbf{1}\}$ est vide, puisque P est borné. □

Définition 5.40 *On définit le dual d'une face F de P par*

$$F^{\diamond} = \{\mathbf{c} \mid \mathbf{c}\mathbf{x} \leq 1 \textit{ pour tout } \mathbf{x} \in P, \textit{ et } \mathbf{c}\mathbf{x} = 1 \textit{ pour tout } \mathbf{x} \in F\} = \{\mathbf{c} \mid \mathbf{x} \in F \Rightarrow \mathbf{c}\mathbf{x} = 1\} \cap P^{\Delta}.$$

C'est donc l'ensemble des polaires des hyperplans valides pour P qui sont supports de F.

Proposition 5.41 *Soit un polytope* $P = Conv(V) = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{1}\}$. *Supposons que*

$$F = conv(V') = \{A''\mathbf{x} \leq \mathbf{1} \textit{ et } A'\mathbf{x} = \mathbf{1}\}$$

soit une face de P avec[1] $V = V' \uplus V''$ *et* $A = A' \uplus A''$. *Alors*

$$F^{\diamond} = Conv(A'^t) = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}V'' \leq \mathbb{1} \textit{ et } \mathbf{a}V' = \mathbb{1}\}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} F^{\diamond} &= \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}\mathbf{x} \leq 1 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in P, \text{ et } \mathbf{a}\mathbf{x} = 1 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in F\} \\ &= \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}V \leq \mathbb{1} \text{ et } \mathbf{a}V' = \mathbb{1}\} \\ &= \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}V'' \leq \mathbb{1} \text{ et } \mathbf{a}V' = \mathbb{1}\} \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned} F^{\diamond} &= \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}\mathbf{x} \leq 1 \text{ pour } \mathbf{x} \in P, \text{ et } \mathbf{a}\mathbf{x} = 1 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in F\} \\ &= \{\mathbf{c}A \mid \mathbf{c} \geq 0, \mathbf{c}\mathbf{1} = 1 \text{ et } \mathbf{c}A\mathbf{x} = 1 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in F\} \text{ par la prop. 5.39, point 7.} \\ &= \{\mathbf{c}'A' \mid \mathbf{c}' \geq 0, \mathbf{c}'\mathbf{1} = 1\} \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, $\supset$ est facile. Vérifions $\subset$: soit $\mathbf{x} \in relint(F)$ avec $A'\mathbf{x} = 1$ et $A''\mathbf{x} < 1$. Alors en écrivant $\mathbf{c}A = \mathbf{c}'A' + \mathbf{c}''A''$ on trouve

$$1 = \mathbf{c}A\mathbf{x} = \mathbf{c}'A'\mathbf{x} + \mathbf{c}''A''\mathbf{x} \leq \mathbf{c}'\mathbf{1} + \mathbf{c}''\mathbf{1} = \mathbf{c}\mathbf{1} = 1$$

Donc $\mathbf{c}''A''\mathbf{x} = \mathbf{c}''\mathbf{1}$, et comme $A''\mathbf{x} < 1$ on a $\mathbf{c}'' = 0$. □

1. La notation $X = X' \uplus X$" indique que les lignes ou les colonnes de X (selon le cas) sont l'union des lignes ou des colonnes de X' et X".

Corollaire 5.42 *Soit P un polytope contenant $\mathbf{0}$ en son intérieur, et soient F et G deux faces de P, alors*

1. *$F^\diamond$ est une face de P^Δ,*
2. *$F^{\diamond\diamond} = F$, et*
3. *$F \subset G$ si et seulement si $G^\diamond \subset F^\diamond$.*

Corollaire 5.43 *Le treillis des faces du polaire d'un polytope est l'opposé du treillis de ses faces.*

5.6 Faces d'un cône

On rappelle qu'un cône polyédrique est décrit de manière équivalente par une intersection d'un nombre fini de demi-espaces vectoriels ou par une enveloppe cônique d'un nombre fini de vecteurs (cf. théorème 5.12).

Un demi-espace vectoriel $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}\mathbf{x} \leq 0\}$ contenant un cône C est dit *valide* pour C. Par extension, on dit que l'hyperplan $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}\mathbf{x} = 0\}$ est valide pour C si le demi-space $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}\mathbf{x} \leq 0\}$ est valide pour C.

La *dimension* d'un cône est la dimension de l'espace vectoriel engendré, i.e. du plus petit espace vectoriel le contenant. Un cône de $\mathbb{R}^d$ est d'intérieur non vide si et seulement si sa dimension est d.

Exercice 5.44 *Montrer que le cône $\{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ est d'intérieur non vide si et seulement si $\{A\mathbf{x} < \mathbf{0}\}$ est non vide.*

Lemme 5.45 *Soit $C = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ un cône de dimension $k < d$ dans $\mathbb{R}^d$. On peut extraire une sous-famille A' de $d-k$ vecteurs de A telle que $\{A'\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ soit l'espace engendré par C.*

Preuve : Il existe $\mathbf{a} \in A$ tel que $C \subset \{\mathbf{a}\mathbf{x} = 0\}$. Sinon, on pourrait choisir pour chaque $\mathbf{a} \in A$, un $\mathbf{x_a} \in C$ tel que $\mathbf{a}\mathbf{x_a} < 0$, mais alors $\mathbf{x} = \sum_{a \in A} \mathbf{x_a} \in C$ et $\mathbf{x} \in \{A\mathbf{x} < \mathbf{0}\}$, ce qui contredit l'exercice précédent. On raisonne ensuite par récurrence sur d avec la trace des demi-espaces de $\{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ dans l'hyperplan $\{\mathbf{a}\mathbf{x} = 0\}$. □

Une *face* d'un cône C est l'intersection de C avec un hyperplan valide. En particulier, une face d'un cône est un cône. Une face propre de C est une face de C non trivialle (qui contient un vecteur non nul) et distincte de C. L'intérieur relatif d'une face est l'intérieur de cette face dans l'espace vectoriel qu'elle engendre. Une face est non trivialle si et seulement si son intérieur est non trivial.

Proposition 5.46 *Soit C un cône polyhedral. L'intersection de deux faces de C est une face de C. Les faces d'une face F de C sont les faces de C incluses dans F.*

Preuve : Adapter la preuve de la proposition 5.28. □

Exercice 5.47 *Montrer que si* $\{A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *et* $A''\mathbf{x} < \mathbf{0}\}$ *est non vide, alors c'est l'intérieur relatif de* $\{A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *et* $A''\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ *dans le sous-espace* $\{A'\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$*.*

Lemme 5.48 *Si* $\{\mathbf{ax} \leq \mathbf{0}\}$ *est valide pour* $C = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$*, alors il existe* $\lambda \geq \mathbb{0}$ *tel que* $a = \lambda A$*.*

Preuve : Appliquer le lemme 5.23. □

Proposition 5.49 *Soit* $C = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ *un cône d'intérieur non vide. L'intérieur relatif de toute face non trivialle de* C *est de la forme*
$\{A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *et* $A''\mathbf{x} < \mathbf{0}\}$*, où* $A = A' \uplus A''$*. Réciproquement tout ensemble non vide de la forme* $\{A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *et* $A''\mathbf{x} < \mathbf{0}\}$ *est l'intérieur relatif d'une face non trivialle de* C*.*

Preuve : Soit $F = \{\mathbf{ax} \leq \mathbf{0}\} \cap C$ une face non trivialle de C. Par le lemme 5.48, il existe $\lambda > \mathbb{0}$ tel que $\mathbf{a} = \lambda A_a$, pour un sous-ensemble A_a des lignes de A. Soit A' l'ensemble des lignes de A telles que $A'F = \mathbf{0}$, et soit $A'' = A \setminus A'$. En particulier, $A_a F \leq \mathbf{0}$ et $\mathbf{a}F = \lambda A_a F = 0$ implique $A_a \subset A'$. On a donc

$$\{A'\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ et } A''\mathbf{x} < \mathbf{0}\} \subset F \subset \{A'\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ et } A''\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$$

Or $I := \{A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $A''\mathbf{x} < \mathbf{0}\}$ n'est pas vide. En effet, pour tout $\mathbf{a}'' \in A''$ il existe $\mathbf{x}_{\mathbf{a}''} \in F$ tel que $\mathbf{a}''\mathbf{x}_{\mathbf{a}''} < 0$. Soit $\mathbf{x} = \sum_{a''} \mathbf{x}_{\mathbf{a}''}$. On a $A''\mathbf{x} < 0$ et par convexité, $\mathbf{x} \in F$, d'où $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Donc I n'est pas vide. On en déduit par l'exercice 5.47 que I est l'intérieur (relatif) de F.

La réciproque est laissée en exercice. □

Proposition 5.50 *Soit* $C = \{\lambda V \mid \lambda \geq \mathbb{0}\}$ *un cône d'intérieur non vide.* F *est une face de* C *si et seulement s'il existe une partition* $V = V' \uplus V''$ *et un vecteur* $\mathbf{x}$ *tels que*

$$V'\mathbf{x} = \mathbf{0}, V''\mathbf{x} < \mathbf{0} \textit{ et } F = \{\lambda' V' \mid \lambda' \geq \mathbf{0}\}$$

Preuve : Soit F une face de C, alors il existe un hyperplan valide $h_x := \{\mathbf{v} \mid \mathbf{vx} = 0\}$ tel que $F = C \cap h_x$. Soit $V' = V \cap h_x$. En particulier $V'\mathbf{x} = \mathbf{0}, V''\mathbf{x} < \mathbf{0}$. De plus, tout élément v de F étant de la forme λV, l'équation $\mathbf{vx} = 0$ équivaut à $v = \lambda' V'$ avec $\lambda' \geq \mathbf{0}$. Réciproquement, soit V', V" et $\mathbf{x}$ comme dans la proposition, alors on vérifie aisément que h_x est valide pour C et que $\{\lambda' V' \mid \lambda' \geq \mathbf{0}\} = C \cap h_x$ est une face de C. □

On définit une *face* d'un polyèdre de manière analogue à une face d'un cône ou d'un polytope, comme l'intersection d'un hyperplan valide avec le polyèdre. Sa dimension et celle de son enveloppe affine.

Soit C un cône et H un hyperplan ne contenant pas $\mathbf{0}$. On considère l'application ϕ qui associe à toute face F du polyèdre $C \cap H$ le cône sur F de sommet $\mathbf{0}$. On considère également l'application ψ qui associe à toute face F de C qui intersecte H l'intersection $F \cap H$.

Lemme 5.51 *Les applications ϕ et ψ sont des bijections inverses l'une de l'autre. De plus ϕ augmente la dimension de 1 et préserve la relation d'inclusion : pour toutes faces F, F' de $C \cap H$*

$$\dim \phi(F) = \dim F + 1 \text{ et } F \subset F' \implies \phi(F) \subset \phi(F')$$

Preuve : Soit D un hyperplan de H support de F pour $C \cap H$. Alors l'enveloppe affine $D' = aff(\mathbf{0} \cup D)$ de $\mathbf{0}$ et D est un hyperplan support de $\phi(F)$ pour C. Réciproquement, soit F une face de C qui intersecte H et soit D un hyperplan support pour F. Alors $D \cap H$ est un hyperplan de H, support de $\psi(F)$ pour $C \cap H$. □

5.6.1 Polarité pour les cônes

On considère la dualité sur $\mathbb{R}^d$, induite par le produit scalaire, qui associe le vecteur $\mathbf{a}$ à la forme linéaire $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{ax}$. Soit C un cône polyédrique.

Définition 5.52 *Le* polaire, *ou* dual, *C^* de C est l'ensemble des vecteurs duaux aux formes linéaires négatives sur C. Soit encore,*

$$C^* = \{\mathbf{a} \mid \forall \mathbf{x} \in C, \mathbf{ax} \leq 0\}$$

La face duale $F^\#$ d'une face F de C est l'ensemble des vecteurs duaux aux formes négatives sur C et nulles sur F :

$$F^\# = \{\mathbf{a} \mid \forall \mathbf{x} \in C, \mathbf{ax} \leq 0 \text{ et } \forall \mathbf{y} \in F, \mathbf{ay} = 0\}$$

Proposition 5.53 *Soit C un cône polyédral.*

1. *Si $C = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ alors $C^* = \{\lambda A \mid \lambda \geq \mathbb{0}\}$*
2. *Si $C = \{\lambda A \mid \lambda \geq \mathbb{0}\}$ alors $C^* = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$.*

Preuve : 1) $\lambda \geq \mathbb{0} \implies \forall \mathbf{x} \in C : \lambda A\mathbf{x} \leq 0 \implies \lambda A \in C^*$, i.e. $\{\lambda A \mid \lambda \geq \mathbb{0}\} \subset C^*$. Réciproquement, soit $\mathbf{a} \in C^*$. Si on ne peut trouver $\lambda \geq \mathbb{0}$ tel que $\mathbf{a} = \lambda A$, alors par le lemme de Farkas 5.22 il existe $\mathbf{c}$ tel que $\mathbf{c}A^t \geq \mathbb{0}$ et $\mathbf{ca^t} < 0$, donc $-\mathbf{c}^t \in C$ et $(-\mathbf{ac}^t) > 0$, ce qui contredit $\mathbf{a} \in C^*$. D'où $\mathbf{a} = \lambda A$ pour un certain $\lambda \geq \mathbb{0}$. D'où $C^* \subset \{\lambda A \mid \lambda \geq \mathbb{0}\}$.

2) $A\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \implies \forall \lambda \geq \mathbb{0} : \lambda A\mathbf{x} \leq 0 \implies \mathbf{x} \in C^*$, i.e. $\{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\} \subset C^*$. Réciproquement, si on a $\lambda A\mathbf{x} \leq 0$ pour tout $\lambda \geq \mathbb{0}$ alors $A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$, d'où $C^* \subset \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$. □

En particulier le dual d'un cône polyédral est un cône polyédral.

Proposition 5.54 *Soit $C = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ un cône polyédral de dimension d dans $\mathbb{R}^d$. La correspondance qui associe à une face F de C sa face duale $F^\#$ établit une bijection entre les faces de dimension k de C et de codimension k de C^*. Cette dualité renverse l'inclusion. De plus, si l'intérieur d'une face F est de la forme $\{A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $A''\mathbf{x} < \mathbf{0}\}$, alors $F^\# = \{\lambda' A' \mid \lambda' \geq \mathbb{0}\}$.*

Preuve : Par la proposition 5.53, $C^* = \{\lambda A \mid \lambda \geq \mathbf{0}\}$. Par la proposition 5.49, l'intérieur relatif de toute face F non trivialle de C est de la forme
$Int_{rel}(F) = \{A'\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ et } A''\mathbf{x} < \mathbf{0}\}$, où $A = A' \uplus A''$. Ceci exprime précisément, par la proposition 5.50, que $F^\#$ est une face de C^*. De plus,

$$\dim F = \dim Int_{rel}(F) = \dim \ker A'$$

(car $\{A''\mathbf{x} < \mathbf{0}\}$ est un ouvert non vide), et $\dim F^\# = rang(A') = d - \dim \ker A'$. Par ailleurs, si F_1, F_2 sont deux faces de C associées à des décomposition respectives $A'_1 \uplus A''_1 = A'_2 \uplus A''_2 = A$, alors clairement $F_1 \subset F_2 \implies A'_2 \subset A'_1 \implies F_2^\# \subset F_1^\#$. □

Exercice 5.55 *Soit P un polytope de $\mathbb{R}^d$ contenant $\mathbf{0}$, et soit C le cône de $\mathbb{R}^{d+1}$ de sommet $\mathbf{0}$ sur le polyèdre translaté $\mathbf{e_{d+1}} + P$. Montrer que $P^\Delta = \mathbf{e_{d+1}} + C^* \cap \{x_{d+1} = -1\}$.*

5.7 Exemples de Polytopes

- Simplexes : ce sont les seuls polytopes à la fois simples et simpliciaux.
- Cubes et cocubes : Le cube $C_n = \{\mathbf{x} \mid -1 \leq x_i \leq 1\}$ est l'intersection des demi-espaces $\{\mathbf{x}(\pm\mathbf{e_i}) \leq 1\}$. Par dualité, on obtient le cocube (ou hyperoctaèdre ou encore polytope croisé) ${C_n}^\Delta = Conv(\pm\mathbf{e_i})$. Mais on a aussi $C_n = Conv(\{-1,1\}^d)$ d'où par dualité encore ${C_n}^\Delta = \{\mathbf{x} \mid \sum |x_i| \leq 1\}$.
- Polytopes simples : Chaque sommet est de degré minimal d, i.e. l'étoile d'un sommet est un simplexe. Exemples : tétraèdre, cube, dodécaèdre. L'intersection bornée d'une famille de demi-espaces en position générale, i.e. telle que par tout point il passe au plus d hyperplans bordant les demi-espaces de la famille, est un polytope simple.
- Polytopes simpliciaux : chaque facette (et donc chaque face propre) est un simplexe. Exemples : tétraèdre, octaèdre, icosaèdre. L'enveloppe convexe d'une famille de points en position générale, i.e. telle que tout sous-ensemble de $d+1$ points soit affinement indépendant, est un polytope simplicial. Le dual d'un polytope simple est simplicial et réciproquement.
- Produits, pyramides, bipyramides.
- Permutaèdres : Enveloppe convexe des points dont les coordonnées sont les $d!$ permutations de $(1, 2, \ldots, d)$.
- Polytopes des couplages d'un graphe $G = (V, E)$: c'est l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidences des couplages de G. Il est défini par le système $\{\forall e \in E : x_e \geq 0, \forall v \in V : \sum_{x \in e} x_e \leq 1\}$.

5.7.1 Polytopes cycliques

Définition 5.56 *La courbe $\gamma : t \Rightarrow (t, t^2, \ldots, t^d)$ de $\mathbb{R}^d$ est appelée* courbe des moments.

Lemme 5.57 *Pour tout entier n et tous réels $t_1, t_2, \ldots, t_n$, les points $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$, $\ldots$, $\gamma(t_n)$ sont en position générale.*

Preuve : L'appartenance d'un point $\gamma(t)$ à un hyperplan quelconque s'exprime par la nullité d'un polynôme de degré au plus d en t qui a au plus d racines. Donc $d+1$ points de la courbe des moments ne peuvent être affinement liés. □

Définition 5.58 *Soient $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. On note $C_d(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, et appelle* polytope cyclique *d'ordre n, l'enveloppe convexe des points $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$, ..., $\gamma(t_n)$ de la courbe des moments dans $\mathbb{R}^d$. D'après le lemme précédent un polytope cyclique est simplicial.*

La proposition ci-après montre que la combinatoire du polytope cyclique d'ordre n dans $\mathbb{R}^d$ ne dépend pas des n points choisis sur la courbe des moments. On note $C_d(n)$ ce polytope.

Proposition 5.59 (Condition de parité de Gale, 1963) *Soient $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. On pose $v_i = \gamma(t_i)$ et $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^d$. Un sous ensemble de d points, $F \subset V$, détermine une facette du polytope cyclique $C_d(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si et seulement si pour tout $v_i, v_j \in V \setminus F$ le nombre de sommets de F entre v_i et v_j est pair.*

Preuve : L'hyperplan H déterminé par F est tel que $H(\gamma(t)) = \alpha \prod_{i=1}^{d}(t - t_i)$ où α est une constante et les t_i sont les paramètres des points de F. La condition de Gale exprime précisément que $H(v_i)$ et $H(v_j)$ ont même signe i.e. sont du même côté de H. □

Corollaire 5.60 *Avec les notations de la proposition précédente, l'enveloppe convexe de tout sous-ensemble de $k \leq \lfloor d/2 \rfloor$ sommets de V est une face de dimension $k-1$ de $C_d(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.*

Preuve : On peut déduire cette propriété de la proposition précédente. En voici une preuve directe. Soit $T_k := \{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_k}\} \subset T := \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ et $V_k \subset V$ le sous-ensemble de sommet correspondant. Alors le polynôme $\prod_{j=1}^{k}(t - t_{i_k})^2$ est nul sur T_k et strictement positif sur $T \setminus T_k$. Comme ce polynôme a un degré au plus d, ses coefficients déterminent une forme linéaire qui est nulle sur V_k et strictement positive sur $V \setminus V_k$. Cette forme correspond donc à un hyperplan support de $C_d(T)$ qui a son tour détermine la face $Conv(V_k)$. Le lemme 5.57 de position générale indique que cette face a dimension $k-1$. □

En particulier, cette propriété implique que les points d'un polytope cyclique sont en position convexe, i.e. que ses points coïncident avec ses sommets.

Exercice 5.61 *Déduire directement le corollaire 5.60 de la proposition 5.59.*

Exercice 5.62 *Déduire de la proposition 5.59 que la combinatoire d'un polytope cyclique d'ordre n ne dépend pas des valeurs des paramètres des points de γ choisis mais seulement de leur nombre n. Utiliser pour cela le fait que le treillis des faces est coatomique.*

Exercice 5.63 *Montrer que le nombre de facettes d'un polytope cyclique d'ordre n dans $\mathbb{R}^d$ est*

$$\binom{n-d/2}{d/2} + \binom{n-d/2-1}{d/2-1}$$

si d est pair, et

$$2\binom{n-\lfloor d/2\rfloor-1}{\lfloor d/2\rfloor}$$

si d est impair.

5.8 Le théorème de la borne supérieure

Par un argument de perturbation, il n'est pas très difficile de montrer que pour tout polytope P à n sommets de dimension d, il existe un polytope *simplicial* à n sommets de dimension d qui possède au moins autant de k-faces que P pour tout k. Dit autrement les polytopes simpliciaux maximisent le nombre de k-faces pour un nombre de sommets fixé n. Puisque toutes les faces propres d'un polytope simplicial sont des simplexes, il est clair qu'un tel polytope a au plus $\binom{n}{k+1}$ faces de dimension k. En particulier, ceci fournit un nombre de facettes de l'ordre de n^d pour n grand devant d. Le théorème de la borne supérieure indique que cette estimation est largement surévaluée et que le nombre de facettes (en fait le nombre total de faces) est de l'ordre $n^{\lfloor d/2\rfloor}$.

Théorème 5.64 (de la borne supérieure, Mac Mullen, 1970) *Tout polytope à n sommets de dimension d a un nombre de k-faces, pour $0 \le k \le d$, majoré par le nombre f_k de k-faces du polytope cyclique d'ordre n dans $\mathbb{R}^d$.*

Définition 5.65 *On note $f_k(P)$ le nombre de k-faces d'un polytope P. La liste $(f_0(P), f_1(P), \dots, f_d(P))$ est appelée le f-*vecteur *de P.*

Voici une version plus faible et beaucoup plus facile à démontrer que le théorème de la borne supérieure.

Proposition 5.66 (version asymptotique, Seidel [Sei95]) *Soit P un polytope à n sommets de dimension d, alors*

$$f_{d-1}(P) \le 2\binom{n}{\lfloor d/2\rfloor},$$

$$\sum_{k=0}^{d} f_k(P) \le 2^{d+1}\binom{n}{\lfloor d/2\rfloor}.$$

À dimension d fixée ces deux dernières quantités sont donc des $O(n^{\lfloor d/2\rfloor})$.

Proposition 5.67 *Soit P un polytope* simplicial *à n sommets de dimension d, alors*

$$f_{d-1}(P) \leq 2f_{\lfloor d/2\rfloor-1}(P),$$

$$\sum_{k=0}^{d} f_k(P) \leq 2^d f_{d-1}(P).$$

Preuve : Pour la seconde inégalité remarquer que chaque facette de P est un $d-1$ simplexe qui a 2^d-1 faces propres au total ; or toute face propre de P est face d'au moins une facette de P. Pour la première inégalité on passe au dual P^Δ de P qui est simple. On considère une direction pour laquelle les sommets de P^Δ ont des hauteurs toutes distinctes. Chaque sommet x de P^Δ a d voisins dont au moins la moitié est soit plus haute soit plus basse. x est donc le sommet de hauteur minimum ou maximum d'au moins une $\lceil d/2\rceil$-face (sur un convexe un extremum local est un extremum). En considérant la relation "être extremum de la $\lceil d/2\rceil$-faces" entre les extremas et les $\lceil d/2\rceil$-faces, on en déduit par double comptage du nombre de relations : $f_0(P^\Delta) \leq 2f_{\lceil d/2\rceil}(P^\Delta)$. Ceci permet de conclure puisque $f_k(P^\Delta) = f_{d-1-k}(P)$. □

Preuve de la proposition 5.66 : Si P est simplicial alors chaque $\lfloor d/2\rfloor-1$-face a exactement $\lfloor d/2\rfloor$ sommets, d'où $f_{\lfloor d/2\rfloor-1}(P) \leq \binom{n}{\lfloor d/2\rfloor}$. La proposition précédente permet de conclure dans le cas simplicial. Si P n'est pas simplicial alors on peut perturber les sommets de P (en position strictement convexe) de manière à obtenir un polyèdre simplicial ayant au moins autant de faces que P dans chaque dimension. Intuitivement, cela correspond à trianguler P sans ajouter de sommet et à perturber les sommets de sorte que leur enveloppe convexe soit combinatoirement équivalente à cette triangulation. □

La démonstration du théorème de la borne supérieure nécessite la notion de bonne orientation acyclique que nous introduisons ci-dessous. Par la dualité des polytopes (cf. corollaire 5.43) une borne sur le nombre de k-faces d'un polytope simplicial à n sommets équivaut à une borne sur le nombre de $(d-k)$-faces d'un polytope simple à n facettes. Il s'avère plus simple de travailler avec des polytopes simples (sic). Le théorème 5.64 devient alors

Théorème 5.68 *Pour tout polytope P de dimension d à n facettes, et pour tout $k \in [0,d]$:*

$$f_k(P) \leq f_k({C_d}^\Delta(n))$$

Il est à noter que par le corollaire 5.60

$$\forall k \geq \lceil d/2\rceil : f_k({C_d}^\Delta(n)) = \binom{n}{d-k} \tag{5.1}$$

5.8.1 Bonne orientation acyclique

Définition 5.69 *Une* orientation acyclique *d'un polytope P est une orientation de ses arêtes telle que son 1-squelette (i.e. le graphe formé de ses arêtes et sommets) ne contienne* *pas de cycle orienté. Une orientation acyclique est* bonne *si sa restriction à toute face non vide F de P (y compris P) contient un unique maximum local, c'est-à-dire un unique sommet qui n'a que des arêtes entrantes dans F.*

On dira qu'une forme linéaire ϕ est *non dégénérée* sur P si sa restriction aux sommets de P est injective. Une telle forme induit une orientation acyclique de P : il suffit d'orienter chaque arête de P de son sommet de plus petite valeur vers son sommet de plus grande valeur pour ϕ.

Lemme 5.70 *Toute forme linéaire non dégénérée sur P induit une bonne orientation acyclique de P.*

Preuve : Il suffit de montrer que ϕ a un unique maximum local sur P : les faces de P étant également des polytopes, l'unicité du maximum local s'appliquera directement à la restriction de ϕ à ces faces. Soit $\mathbf{v}$ un sommet de P qui est maximum local pour ϕ. On considère le cône polyédrique C_v défini par les demi-espaces supports des facettes de P contenant v. En particulier $P \subset C_v$. Il suit de la propriété 5.30 de l'étoile d'un sommet que C_v est l'enveloppe conique des arêtes incidentes à v. Puisque ϕ est maximale en v sur toute ces arêtes, ϕ est également maximale en v sur C_v et donc sur P. Donc v est l'unique maximum de ϕ sur P par hypothèse de non-dégénérescence. $\square$

5.8.2 h-vecteur

Dans ce qui suit on suppose que P est un polytope simple de dimension d possédant n facettes. En particulier le degré de chaque sommet dans le 1-squelette de P est exactement d. On peut le voir en remarquant que l'étoile de chaque sommet de P est un $(d-1)$-simplexe. De plus, chaque face de P est également un polytope simple.

Définition 5.71 *Si o est une bonne orientation acyclique de P, on note $V_i(o)$ les sommets de P de degré entrant égal à i et on pose $h_i(o) = |V_i(o)|$.*

Théorème 5.72 *Soit o une bonne orientation acyclique de P. Pour tout $i \in [0, d]$:*

$$f_i(P) = \sum_{0 \le k \le d} \binom{k}{i} h_k(o), \quad \text{et} \tag{5.2}$$

$$h_i(o) = \sum_{0 \le k \le d} (-1)^{i+k} \binom{k}{i} f_k(P) \tag{5.3}$$

En particulier, $h_i(o)$ est indépendant de o.

On note désormais $h_i(P)$ la valeur commune des $h_i(o)$. La liste $(h_0(P), h_1(P), \ldots, h_d(P))$ est appelée le *h-vecteur* de P.

Preuve : Pour $v \in V(P)$ on note $f_i(v)$ le nombre de i-faces de P dont v est le maximum (pour o). D'où

$$f_i(P) = \sum_{v \in V(P)} f_i(v) = \sum_{0 \le k \le d} \sum_{v \in V_k(o)} f_i(v)$$

Or une i-face incidente à v est déterminée par i arêtes incidentes à v. Pour que v soit maximum dans cette face il faut que ces i arêtes soient entrantes en v ce qui laisse $\binom{k}{i}$ choix possibles si $v \in V_k(o)$. On en déduit (5.2) compte tenu de $h_k(o) = |V_k(o)|$.

L'équation (5.2) implique que la série génératrice du f-vecteur $f(x) = \sum_i f_i(P)x^i$ et la série $h(x) = \sum_i h_i(o)x^i$ sont reliées par

$$f(x) = h(x+1)$$

D'où $h(x) = f(x-1)$, ce qui après développement et identification des termes fournit la relation (5.3) □

Théorème 5.73 (Relations de Dehn-Sommerville) *Pour tout* $i \in [0, d]$ *:*

$$h_i(P) = h_{d-i}(P) \tag{5.4}$$

Preuve : Soit o une bonne orientation acyclique de P induite par une forme linéaire ϕ. Alors $-\phi$ induit une orientation $\bar{o}$ inverse de o d'où $h_i(\bar{o}) = h_{d-i}(o)$ (rappelons que tout sommet est de degré d dans un polytope simple). On conclut avec l'indépendance du h-vecteur relativement aux orientations. □

Lemme 5.74 *Pour toute face F de P et pour tout $i \in [0, d]$*

$$h_i(F) \le h_i(P)$$

Preuve : Soit $\{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}) = x_0\}$ un hyperplan support de F tel que $\phi(P) \ge x_0$. En particulier $x_0 < \min_{V(P) \setminus V(F)} \phi$. Par perturbation infinitésimale de ϕ on obtient une forme ψ non dégénérée sur P telle que $\max_{V(F)} \psi < \min_{V(P) \setminus V(F)} \psi$. Soit o l'orientation acyclique induite par ψ. Alors tout sommet $v \in V(F)$ de degré entrant i dans F pour o est également de degré i dans P pour o puisque l'origine w d'une arête entrante de v vérifie $\psi(w) < \psi(v)$ et est donc dans F. On conclut en utilisant à nouveau l'indépendance du h-vecteur par rapport à o. □

Corollaire 5.75 (Relation d'Euler)

$$\sum_{0 \le k \le d} (-1)^k f_k(P) = 1$$

Preuve : Par les relations de Dehn-Sommerville $h_0(P) = h_d(P) = 1$. Notons au passage que cela indique que toute bonne orientation acyclique possède non seulement un unique maximum local dans toute face de P (par définition) mais également un unique minimum local. La relation d'Euler se résume alors à la relation (5.3) avec $i = 0$. □

Lemme 5.76 *Pour tout $i \in [0, d-1]$:*

$$\sum_{F \in F_{d-1}(P)} h_i(F) = (d-i)h_i(P) + (i+1)h_{i+1}(P)$$

où $F_{d-1}(P)$ désigne l'ensemble des n facettes de P.

Preuve : On choisit une bonne orientation acyclique o de P et on note $V_i(P)$ l'ensemble des sommets de degré entrant i dans P pour o. De même, si F est une facette de P, $V_i(F)$ désigne l'ensemble des sommets de degré entrant i dans F pour o (restreinte à F).

Pour $v \in V(P)$, on définit $g_i(v)$ comme le nombre de facettes F de P telles que $v \in V_i(F)$. Par double comptage du nombre d'incidences de la relation $\{(v, F) \in V(P) \times F_{d-1}(P) \mid v \in V_i(F)\}$ on obtient

$$\sum_{F \in F_{d-1}(P)} h_i(F) = \sum_{v \in V(P)} g_i(v)$$

Cette dernière somme se décompose comme suit

$$\sum_{0 \le j \le d} \sum_{v \in V_j(P)} g_i(v) = \sum_{v \in V_i(P)} g_i(v) + \sum_{v \in V_{i+1}(P)} g_i(v)$$

En effet, tout sommet v d'une facette F étant de degré $d-1$ dans cette facette, une seule arête de P en v n'est pas dans F. Selon que cette arête est sortante ou entrante en v on déduit que le degré entrant de v dans P est respectivement le même ou un de plus que dans F.

Mais pour tout $v \in V_i(o)$ on a $g_i(v) = d - i$ car toute facette de degré entrant i en v est déterminée en supprimant une des $d - i$ arêtes sortantes de P en v. Par un raisonnement analogue, pour tout $v \in V_{i+1}(o)$ on a $g_i(v) = i + 1$. On conclut en rappelant que $h_j(P) = |V_j(P)|$ par définition. □

Théorème 5.77 (de la borne supérieur pour le h-vecteur)

$$h_i(P) \le \binom{n - 1 - \max\{i, d-i\}}{\min\{i, d-i\}}$$

Preuve : L'inégalité du lemme 5.74 reportée dans le lemme 5.76 donne $(d-i)h_i(P) + (i+1)h_{i+1}(P) \le nh_i(P)$, soit

$$h_{i+1}(P) \le \frac{n-d+i}{i+1} h_i(P)$$

On en conclut $h_i(P) \le \binom{n-1-d+i}{i}$ par récurrence sur i compte tenu de $h_0(P) = 1$ et on termine pour la preuve à l'aide des relations de Dehn-Sommerville (5.4). □

5.8.3 Preuve du théorème de la borne supérieure

Preuve du théorème 5.68 : Par la relation (5.2), il suffit de montrer que la majoration du h-vecteur dans le théorème 5.77 est une égalité pour le dual du polytope cyclique d'ordre n. En reportant les égalités (5.1) dans (5.3), on a pour $i \geq \lceil d/2 \rceil$

$$h_i({C_d}^{\Delta}(n)) = \sum_{k=i}^{d} (-1)^{i+k} \binom{k}{i} \binom{n}{d-k}$$

Ce qui, après manipulation des coefficients binomiaux, donne bien l'égalité du théorème 5.77. Le cas $i \leq \lfloor d/2 \rfloor$ se déduit des relations de Dehn-Sommerville (5.4). □

La relation (5.2) donne plus précisément

$$f_i(P) \leq \sum_{0 \leq k \leq d} \binom{k}{i} \binom{n-1-\max\{k, d-k\}}{\min\{k, d-k\}}$$

d'où $f_i(P) = O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ pour d constant.

5.9 Steinitz,...

Théorème 5.78 (Steinitz, 1922) *Tout graphe planaire simple et 3-connexe est le graphe (1-squelette) d'un 3-polytope et réciproquement.*

Théorème 5.79 (Balinski, 1961) *Le graphe d'un d-polytope est d-connexe.*

Conjecture de Hirsh *Le diamètre d'un d-polytope à n facettes est majoré par $n-d$.* Voir sa récente infirmation par Francisco Santos Leal : `http://personales.unican.es/santosf/Hirsch/`

5.10 Programmation Linéaire

Un problème de programmation linéaire (PPL) consiste en l'optimisation d'une forme linéaire sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ défini par un ensemble d'équations et inéquations (au sens large : $\leq$ ou $\geq$) affines. Toute solution de cet ensemble d'(in)équations dite *admissible* pour le PPL. La *valeur* d'un PPL admettant une solution admissible est l'optimum de la forme linéaire associée. Une solution est dite *optimale* si elle est admissible et optimise la forme linéaire associée. Tout PPL peut se ramener de manière équivalente à une forme *canonique*

$$\begin{array}{rcl} \min \mathbf{cx} & & \\ A\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}. \end{array}$$

ou à une forme *standard*

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{cx} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \qquad\qquad \text{(E)} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

(Bien sûr les matrices $A, \mathbf{c}$ et $\mathbf{b}$ ne sont pas les mêmes dans les deux formes !). Il suffit de remarquer pour cela que toute inéquation $\mathbf{ax} \geq \mathbf{b}$ peut s'écrire $\mathbf{ax} - x_0 = \mathbf{b}$ où x_0 est une variable supplémentaire non négative et réciproquement que toute équation $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$ est équivalente aux deux inéquations $\mathbf{ax} \geq \mathbf{b}$ et $-\mathbf{ax} \geq -\mathbf{b}$. De plus, on peut écrire $\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$ où $\mathbf{x}^+$ et $\mathbf{x}^-$ sont deux vecteurs non négatifs.

Théorème 5.80 (de dualité de la programmation linéaire) *Pour des matrices de dimensions appropriées, on a*

$$\max\{\mathbf{cx} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} = \min\{\mathbf{yb} \mid \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}A = \mathbf{c}\}$$

pourvu que le min et le max soient pris sur des ensembles non vides.

Preuve : On pose $X = \{A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ et $Y = \{\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}A = \mathbf{c}\}$. On a

$$\forall \mathbf{x} \in X, \forall \mathbf{y} \in Y \; : \; A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \implies \mathbf{y}A\mathbf{x} \leq \mathbf{yb} \implies \mathbf{cx} \leq \mathbf{yb}$$

D'où $\max \mathbf{c}X \leq \min Y\mathbf{b}$. Il suffit donc de montrer l'existence de $\mathbf{x} \in X$ et $\mathbf{y} \in Y$ tels que $\mathbf{cx} \geq \mathbf{yb}$. Ce qui s'écrit encore

$$\exists\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ tel que } \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \\ \mathbf{0} & A^t \\ \mathbf{0} & -A^t \\ -\mathbf{c} & \mathbf{b}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^t \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^t \\ -\mathbf{c}^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par le lemme de Farkas 5.21, la non-existence de tels $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ implique

$$\exists\, [\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}, u_5] \geq \mathbf{0} \text{ tel que } [\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}, u_5] \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \\ \mathbf{0} & A^t \\ \mathbf{0} & -A^t \\ -\mathbf{c} & \mathbf{b}^t \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ et}$$

$$[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}, u_5] \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^t \\ -\mathbf{c}^t \\ 0 \end{bmatrix} < 0$$

ce qui s'écrit encore $\mathbf{u_1}A = u_5\mathbf{c}$, $(\mathbf{u_4} - \mathbf{u_3})A^t = u_5\mathbf{b}^t - \mathbf{u_2}$ et $\mathbf{u_1 b} < (\mathbf{u_4} - \mathbf{u_3})\mathbf{c}^t$.

– Ou bien $u_5 = 0$ et on en déduit l'existence de $\mathbf{u_1} \geq \mathbf{0}$ et de $\mathbf{v}(= \mathbf{u_4} - \mathbf{u_3})$ tels que
$$\mathbf{u_1}A = \mathbf{0},\ \mathbf{v}A^t \leq \mathbf{0},\ \mathbf{u_1}\mathbf{b} < \mathbf{v}\mathbf{c}^t$$
Comme X est non vide, on a pour un certain $\mathbf{x}$: $\mathbf{u_1}\mathbf{b} \geq \mathbf{u_1}A\mathbf{x} = 0$. De même Y est non vide et pour un certain $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$: $\mathbf{v}\mathbf{c}^t = \mathbf{v}A^t\mathbf{y}^t \leq 0$. D'où $\mathbf{u_1}\mathbf{b} \geq \mathbf{v}\mathbf{c}^t$, une contradiction.

– Ou bien $u_5 > 0$ et on en déduit l'existence de $\mathbf{y}(= \mathbf{u_1}/u_5) \geq \mathbf{0}$ et de $\mathbf{x}(= (\mathbf{u_4} - \mathbf{u_3})^t/u_5)$ tels que
$$\mathbf{y}A = \mathbf{c},\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{y}\mathbf{b} < \mathbf{c}\mathbf{x}$$
ce qui contredit l'hypothèse de non-existence ci-dessus !

□

Le théorème de dualité de la programmation linéaire a de nombreuses formulations équivalente dont :

Corollaire 5.81 *Pour des matrices de dimensions appropriées, on a*
$$\max\{\mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} = \min\{\mathbf{y}\mathbf{b} \mid \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}A \geq \mathbf{c}\} \quad (5.5)$$
$$\max\{\mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} = \min\{\mathbf{y}\mathbf{b} \mid \mathbf{y}A \geq \mathbf{c}\} \quad (5.6)$$
pourvu dans chaque égalité que le min et le max soient pris sur des ensembles non vides.

5.10.1 Application de la dualité

Comme application de la dualité de la programmation linéaire nous donnons une preuve du classique théorème de flot maximum - coupe minimale.

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On note respectivement $o(a)$ et $t(a)$ le sommet origine et le sommet terminaison de l'arc a. On se donne pour chaque arc $a \in A$, une *capacité* $c_a \geq 0$, et on considère deux sommets distingués $s, p \in S$, appelés respectivement la *source* et le *puits*. Un *flot* $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}, a \mapsto f_a$ est *admissible* pour $(G, \mathbf{c}, s, p)$ s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. $\forall a \in A : 0 \leq f_a \leq c_a$
2. $\forall v \in S \setminus \{s, p\} : \sum_{a:o(a)=v} f_a = \sum_{a:t(a)=v} f_a$ (condition de conservation du flot, dite loi des noeuds)

La *valeur* $v(\mathbf{f})$ d'un flot $\mathbf{f}$ est la différence entre le flot sortant de s et le flot entrant en s :
$$v(\mathbf{f}) = \sum_{a:o(a)=s} f_a - \sum_{a:t(a)=s} f_a$$

Une *coupe* pour $(G, \mathbf{c}, s, p)$ est une partition $(V, S \setminus V)$ de S telle que $s \in V$ et $p \notin V$. La *capacité* $c(V, W)$ d'une coupe (V, W) est la différence entre les capacités des arcs sortant de V et entrant dans V :
$$c(V, W) = \sum_{\substack{a:o(a)\in V,\\ t(a)\in W}} c_a - \sum_{\substack{a:o(a)\in W,\\ t(a)\in V}} c_a$$

On définit le flot d'une coupe (V,W) par

$$f(V,W) = \sum_{\substack{a:o(a)\in V,\\ t(a)\in W}} f_a - \sum_{\substack{a:o(a)\in W,\\ t(a)\in V}} f_a$$

et le flot d'un sommet v par

$$f(v) = \sum_{a:o(a)=v} f_a - \sum_{a:t(a)=v} f_a$$

Ainsi pour tout flot admissible $f(s) = v(\mathbf{f})$ et $f(u) = 0$ si $u \neq s, p$. On vérifie aisément que pour toute coupe (V,W) :

$$f(V,W) = \sum_{v\in V} f(v) \tag{5.7}$$

Théorème 5.82 (flot max - coupe min, Ford - Fulkerson, 1956) *La valeur maximale des flots admissibles est égale à la capacité minimale des coupes.*

Nous donnons ci-dessous une preuve consistant à appliquer la dualité à un programme linéaire équivalent au calcul du flot maximal[2], puis à montrer que l'on peut se restreindre aux solutions entières du problème dual. Ce dernier programme entier s'interprète alors comme le calcul de la coupe minimale.

En interprétant $\mathbf{f}$ et $\mathbf{c}$ comme des vecteurs de R^A de composantes respectives f_a et c_a, le calcul du flot maximal est modélisé par le PPL suivant :

$$\begin{array}{ll} \max v(\mathbf{f}) & \\ & \mathbf{f} \leq \mathbf{c} \\ & \forall v \in S \setminus \{s,p\} : \displaystyle\sum_{a:o(a)=v} f_a = \sum_{a:t(a)=v} f_a \\ & \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{5.8}$$

Soit $\Pi_{s,p}$ l'ensemble des chemins simples de G joignant s à p. On considère le PPL

$$\begin{array}{ll} \max \displaystyle\sum_{\pi\in\Pi_{s,p}} x_\pi & \\ & \forall a \in A : \displaystyle\sum_{\pi:a\in\pi} x_\pi \leq c_a \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{5.9}$$

Lemme 5.83 *La valeur du PPL (5.8) est égale à la valeur du PPL (5.9).*

2. Il existe des preuves directes de ce résultat sans utiliser la dualité de la programmation linéaire.

Preuve : Notons que les deux PPLs admettent $\mathbf{0}$ comme solution admissible et sont trivialement bornés. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\Pi_{s,p}}$ une solution admissible pour (5.9). On vérifie aisément que le flot $f_a = \sum_{\pi:a\in\pi} x_\pi$ est admissible pour (5.8) et que $v(\mathbf{f}) = \mathbb{1}\mathbf{x}$. On en déduit valeur(5.9) $\leq$ valeur(5.8). Inversement, soit $\mathbf{f}$ un flot admissible pour (5.8) avec $v(\mathbf{f}) > 0$. Soit G_f le sous-graphe de G restreint aux arcs a tels que $f_a > 0$, et soit S_f l'ensemble des sommets atteignables depuis s dans G_f. Si $p \notin S_f$, alors S_f induit une coupe de flot négatif ou nul (les arcs sortants ont un flot nul). D'après (5.7), ceci est en contradiction avec l'hypothèse $v(\mathbf{f}) > 0$. Donc $p \in S_f$, i.e. il existe un chemin $\pi \in \Pi_{s,p}$ dont tous les arcs ont un flot strictement positif. Soit x_π la valeur minimale du flot sur les arcs de π. On considère le flot $\mathbf{f}'$:

$$f'_a = \begin{cases} f_a - x_\pi & \text{si } a \in \pi \\ f_a & \text{sinon} \end{cases}$$

Clairement, $\mathbf{f}'$ est un flot admissible et $v(\mathbf{f}') < v(\mathbf{f})$. En posant $x_\gamma = 0$ pour $\gamma \in \Pi_{s,p} - \{\pi\}$ on a de plus

$$\forall a \in A : f_a = f'_a + \sum_{a:a\in\gamma} x_\gamma$$

On peut itérer ce procédé en partant de $\mathbf{f}'$ au lieu de $\mathbf{f}$. Puisque le graphe $G_{f'}$ contient au moins un arc de moins que G_f, la valeur du flot obtenu par itération du procédé doit s'annuler au bout d'un nombre fini k d'étapes. On a alors obtenu une famille de chemins $\pi, \pi', \ldots, \pi^{(k)}$ de $\Pi_{s,p}$ et des valeurs $x_\pi, x_{\pi'}, \ldots, x_{\pi^{(k)}}$ correspondantes. En posant $x_\gamma = 0$ pour les chemins hors de cette famille, on a de plus

$$\forall a \in A : f_a = f_a^{(k)} + \sum_{\gamma:a\in\gamma} x_\gamma$$

On a ainsi construit une solution admissible $\mathbf{x}$ pour (5.9) telle que

$$v(f) = f(s) = f^{(k)}(s) + \sum_{a:o(a)=s} \sum_{\gamma:a\in\gamma} x_\gamma = \mathbb{1}\mathbf{x}$$

(utiliser le fait que $f^{(k)}(s) = v(\mathbf{f^{(k)}}) = 0$ et que l'ensemble des chemins contenant un arc sortant de s est précisément $\Pi_{s,p}$). On en déduit valeur(5.8) $\leq$ valeur(5.9), et finalement valeur(5.9) $=$ valeur(5.8). □

Par l'équation (5.5) de dualité de la programmation linéaire, le PPL (5.9) a même valeur que le PPL suivant, où l'on a posé $v(\mathbf{y}) = \sum_{a\in A} c_a y_a$:

$$\begin{aligned} &\min v(\mathbf{y}) \\ &\qquad \forall \pi \in \Pi_{s,p} : \sum_{a:a\in\pi} y_a \geq 1 \\ &\qquad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Lemme 5.84 *Le PPL (5.10) a même valeur que sa restriction* $(5.10)_{\mathbb{Z}}$ *à des vecteurs* y *entiers.*

On en déduit une

Preuve du théorème 5.82 : Par les lemmes 5.83 et 5.84, il suffit de montrer que la valeur de $(5.10)_{\mathbb{Z}}$ est la capacité minimale de toute coupe. Soit (V, W) une coupe. On pose $\mathbf{y} = (y_a)_{a \in A}$ avec

$$y_a = \begin{cases} 1 & \text{si } o(a) \in V \text{ et } t(a) \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\mathbf{y}$ est une solution admissible pour $(5.10)_{\mathbb{Z}}$ et $v(\mathbf{y}) = c(V, W)$. On en déduit que la valeur de $(5.10)_{\mathbb{Z}}$ est inférieure à la capacité minimale des coupes. Inversement, soit $\mathbf{y}$ une solution admissible pour $(5.10)_{\mathbb{Z}}$. On définit V comme l'ensemble des sommets atteignables depuis s en utilisant des arcs tels que $y_a = 0$. La condition $\sum_{a: a \in \pi} y_a \geq 1$ indique que $p \notin V$, donc V induit une coupe. De plus,

$$c(V, S \setminus V) \leq \sum_{\substack{a: o(a) \in V, \\ t(a) \notin V}} c_a \leq \sum_{\substack{a: o(a) \in V, \\ t(a) \notin V}} c_a y_a \leq v(y)$$

Il suit que la capacité minimale des coupes est majorée par la valeur de $(5.10)_{\mathbb{Z}}$, d'où l'égalité de ces deux grandeurs. □

Il ne reste plus qu'à donner une

Preuve du lemme 5.84 : Une première preuve utilise le fait que la matrice des inéquations du PPL (5.10) est totalement unimodulaire (cf [MG07, p.144-145]). On en donne une preuve directe. Notons que $y_a = 1$ est une solution admissible pour les PPLs (5.10) et $(5.10)_{\mathbb{Z}}$. Par restriction de l'espace des solutions, valeur(5.10) est majorée par valeur$(5.10)_{\mathbb{Z}}$. Inversement, soit $\mathbf{y}$ une solution optimale pour (5.10). On définit V comme l'ensemble des sommets atteignables depuis s en utilisant des arcs tels que $y_a = 0$. Comme dans la preuve précédente, V induit une coupe et on pose $\mathbf{y}^{\mathbb{Z}} = (y_a^{\mathbb{Z}})_{a \in A}$ avec

$$y_a^{\mathbb{Z}} = \begin{cases} 1 & \text{si } o(a) \in V \text{ et } t(a) \notin V \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbf{y}^{\mathbb{Z}}$ est clairement une solution admissible pour $(5.10)_{\mathbb{Z}}$.
Soit $\alpha = \min\{y_a \mid o(a) \in V, t(a) \notin V\}$. On pose également $\mathbf{y}' = (y'_a)_{a \in A}$ avec $y'_a = \frac{y_a - \alpha y_a^{\mathbb{Z}}}{1 - \alpha}$. Clairement $\mathbf{y}' \geq \mathbf{0}$. Soit π un chemin joignant s à p. Il suit que π contient au moins un arc de la coupe (entre V et son complémentaire). On écrit $\pi = \pi_{su} \cdot \pi_{up}$ où u est le dernier sommet dans V le long de π. On pose $\pi' = \pi'_{su} \cdot \pi_{up}$ où π'_{su} est un chemin joignant s à u par des arcs tels que $y_a = 0$. Puisque $y_a = 0$ implique $y'_a = 0$, on a

$$\sum_{a \in \pi} y'_a \geq \sum_{a \in \pi'} y'_a$$

Or π' contient un unique arc entre V et son complémentaire, d'où $\sum_{a \in \pi'} y_a^{\mathbb{Z}} = 1$. Par ailleurs $\sum_{a \in \pi'} y_a \geq 1$ et on en déduit aisément $\sum_{a \in \pi'} y'_a \geq 1$, ce qui montre que y' est une solution admissible pour (5.10).

Donc $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{y}^{\mathbb{Z}} + (1 - \alpha \mathbf{y}')$ est une combinaison convexe de deux solution admissibles. Ces deux solutions sont donc optimales, d'où $v(\mathbf{y}^{\mathbb{Z}}) = v(\mathbf{y})$. Il suit que valeur$(5.10)_{\mathbb{Z}}$ est majorée par valeur(5.10), d'où l'égalité entre ces deux grandeurs. □

5.10.2 Algorithme du simplexe

On ne considérera ici que des PPLs sous forme standard, avec A de dimension $m \times n$. Dans un premier temps on supposera que A est de rang m, ce qui implique qu'il y a plus d'inconnus que d'équations. On appelle *solution ou point admissible* de (E) tout $\mathbf{x}$ vérifiant les contraintes $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Soit $B = \{B(1), B(2), \ldots B(m)\} \subset [1, n]$ un sous-ensemble de m indices tels que les vecteurs colonnes de A correspondant soient indépendants, i.e. tels que la matrice $A_B = [\mathbf{a_{B(1)}}\ \mathbf{a_{B(2)}} \ldots \mathbf{a_{B(m)}}]$ soit inversible. On note $N = [1, n] \setminus B$ les indices complémentaires et on décompose un vecteur en deux morceaux selon les indices de ses composantes $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$. B est appelée une *base* de (E) et le vecteur $\begin{bmatrix} A_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, la *solution basique* associée. On parle de *solution basique admissible (ou réalisable)* (s.b.a.) lorsque $A_B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. La base associée est dite admissible.

La projection $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{x}_N$ réalise une bijection, d'inverse $\mathbf{x}_N \mapsto \begin{bmatrix} A_B^{-1}(\mathbf{b} - A_N\mathbf{x}_N) \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$, entre l'ensemble des points admissibles de (E) dans $\mathbb{R}^{B \cup N}$ et le polyèdre de $\mathbb{R}^N$: $\{\begin{bmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{bmatrix} \mathbf{x_N} \geq \begin{bmatrix} -A_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\}$. Notons que la structure combinatoire de ce polyèdre ne dépend pas de la base choisie. On note P ce polyèdre.

Lemme 5.85 *Pour toute base admissible B, il existe un vecteur de coût $\mathbf{c}$ tel que la s.b.a. associée à B soit l'unique solution optimale de (E).*

Preuve : Considérer le vecteur $\mathbf{c} = (\mathbf{c_B}\ \mathbf{c_N}) = (\mathbb{0}\ \mathbb{1})$ □

Théorème 5.86 *Les sommets de P sont en bijection avec les bases admissibles de (E).*

Preuve : Soit $\mathbf{y_N}$ un sommet de P relativement à une base B. Je note B' l'ensemble des indices des coordonnées positives de la s.b.a. $\mathbf{y}$ associée, de sorte que $A_{B'}\mathbf{y_{B'}} = \mathbf{b}$. Les colonnes de $A_{B'}$ forment une famille libre. En effet, dans le cas contraire on a un jeux de coefficients $\mathbf{d}$ non nul tel que $A_{B'}\mathbf{d} = \mathbf{0}$. En choisissant un $\epsilon > 0$ assez petit, on a alors $A_{B'}(\mathbf{y_{B'}} \pm \epsilon\mathbf{d}) = \mathbf{b}$ et $\mathbf{y_{B'}} \pm \epsilon\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$. On en déduit deux points distincts dans P dont le milieux est le sommet $\mathbf{y_N}$. Ceci contredit le lemme 5.26 sur l'extrémalité des sommets d'un polyèdre.

Réciproquement, si B est une base admissible alors le lemme 5.85 fournit un hyperplan support de P, intersectant P en l'unique point projection de la s.b.a. de B, qui est donc un sommet de P. □

Définition 5.87 *Un* pivot *consiste à remplacer un indice d'une base admissible par un indice non-base, de manière à ce que le nouvel ensemble d'indices corresponde à une base admissible. Deux bases qui se déduisent d'un pivot sont dites* adjacentes.

Théorème 5.88 *Deux bases adjacentes correspondent à deux sommets adjacents de P.*

L'algorithme du simplexe est dû à Dantzig (1947). Il consiste à partir d'une base admissible à effectuer une suite de pivots en faisant décroître le coût des s.b.a. associées jusqu'à atteindre l'optimum. Dit autrement, l'algorithme du simplexe consiste à se déplacer le long des arêtes de P en descendant toujours relativement à la forme linéaire associée au coût.

Pour en savoir plus sur la programmation linéaire en général, on pourra consulter l'excellente introduction au domaine de J. Matoušek et B. Gärtner [MG07].