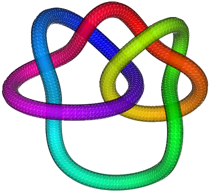
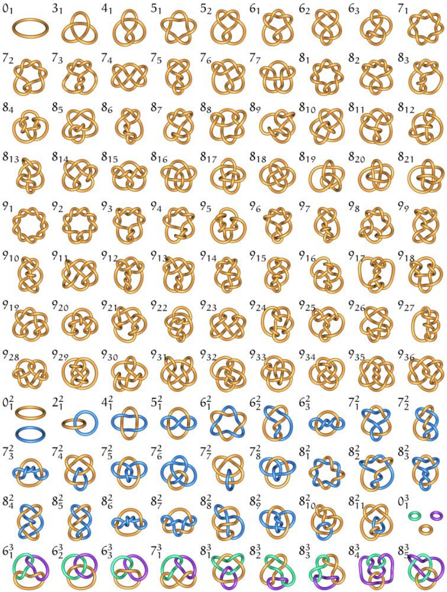
Journées de Géométrie Algorithmique



Combinatoire de la théorie des noeuds et des tresses

Christian Blanchet

31 janvier 2005


0_1 3_1 4_1 5_1 5_2 6_1 6_2 6_3 7_1
7_2 7_3 7_4 7_5 7_6 7_7 8_1 8_2 8_3
8_4 8_5 8_6 8_7 8_8 8_9 8_{10} 8_{11} 8_{12}
8_{13} 8_{14} 8_{15} 8_{16} 8_{17} 8_{18} 8_{19} 8_{20} 8_{21}
9_1 9_2 9_3 9_4 9_5 9_6 9_7 9_8 9_9
9_{10} 9_{11} 9_{12} 9_{13} 9_{14} 9_{15} 9_{16} 9_{17} 9_{18}
9_{19} 9_{20} 9_{21} 9_{22} 9_{23} 9_{24} 9_{25} 9_{26} 9_{27}
9_{28} 9_{29} 9_{30} 9_{31} 9_{32} 9_{33} 9_{34} 9_{35} 9_{36}
0_1^2 2_1^2 4_1^2 5_1^2 6_1^2 6_2^2 6_3^2 7_1^2 7_2^2
7_3^2 7_4^2 7_5^2 7_6^2 7_7^2 7_8^2 8_1^2 8_2^2 8_3^2
8_4^2 8_5^2 8_6^2 8_7^2 8_8^2 8_9^2 8_{10}^2 8_{11}^2 0_1^3
6_1^3 6_2^3 6_3^3 7_1^3 8_1^3 8_2^3 8_3^3 8_4^3 8_5^3

Noeuds polygonaux

- Noeud polygonal (PL) dans $\mathbb{R}^3$:
  réunion de segments formant une ligne fermée

Noeuds polygonaux

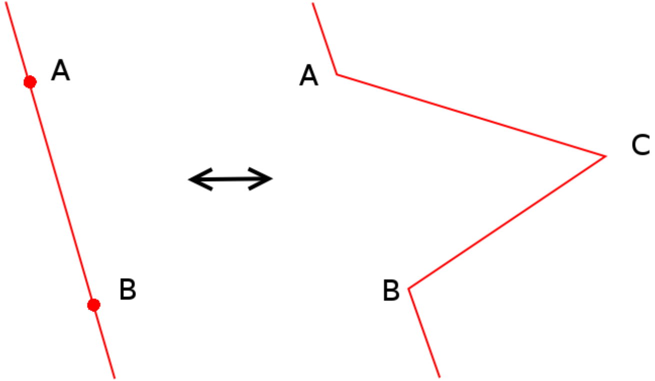
- Noeud polygonal (PL) dans $\mathbb{R}^3$:
  réunion de segments formant une ligne fermée
- plus mathématique: plongement PL du cercle

Noeuds polygonaux

- Noeud polygonal (PL) dans $\mathbb{R}^3$:
  réunion de segments formant une ligne fermée
- plus mathématique: plongement PL du cercle
- plusieurs composantes: entrelacs

Equivalence combinatoire

- Remplacer un segment par les deux autres côtés d'un triangle
  L'intersection de l'entrelacs avec le triangle est le segment $[AB]$

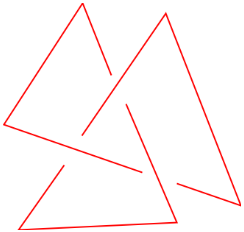


Diagrammes

- La projection de l'entrelacs sur un plan générique: les segments se projettent en des segments qui s'intersectent en leur intérieur, pas de point triple.

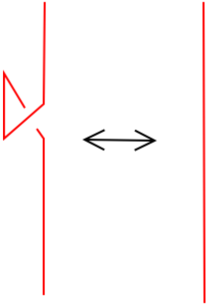
Diagrammes

- La projection de l'entrelacs sur un plan générique: les segments se projettent en des segments qui s'intersectent en leur intérieur, pas de point triple.
- Le diagramme plan, avec l'information dessus-dessous à chaque croisement détermine l'entrelacs à équivalence combinatoire près.



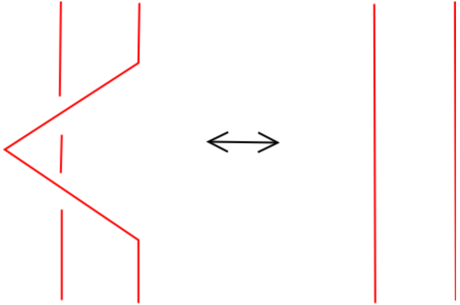
Le théorème de Reidemeister

- Mouvements sur les diagrammes engendrant l'équivalence des entrelacs: R1



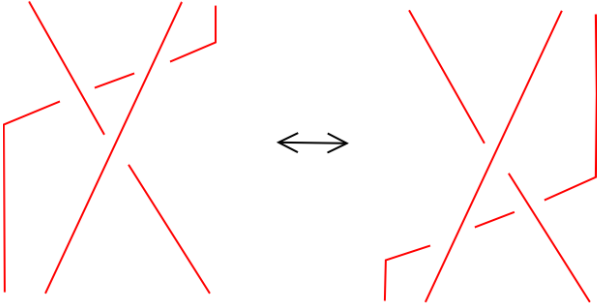
Le théorème de Reidemeister

- Mouvement R2



Le théorème de Reidemeister

- Mouvement R3

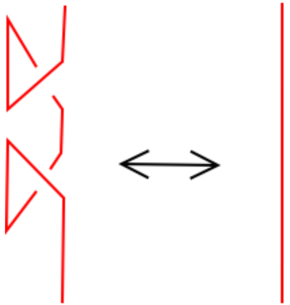


Variantes

- Entrelacs orientés: chaque noeud a un sens de parcours
  Mouvements de Reidemeister: envisager toutes les orientations

Variantes

- Entrelacs orientés: chaque noeud a un sens de parcours
  Mouvements de Reidemeister: envisager toutes les orientations
- Entrelacs en rubans: le 1er mouvement de Reidemeister devient

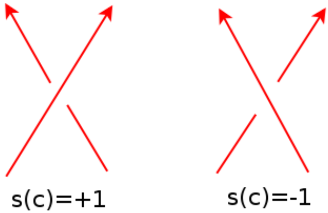


Invariants

On peut construire des invariants avec des fonctions sur les diagrammes compatibles avec les mouvements de Reidemeister.

- L'enlacement de deux composantes:

$$Lk(K, K') = \frac{1}{2} \sum s(c)$$

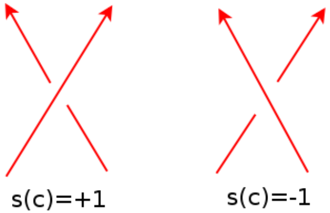


Invariants

On peut construire des invariants avec des fonctions sur les diagrammes compatibles avec les mouvements de Reidemeister.

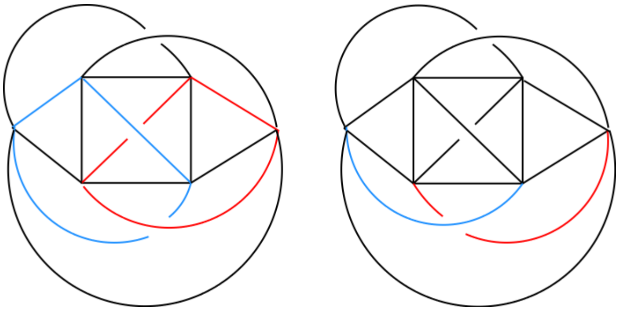
- L'enlacement de deux composantes:

$$Lk(K, K') = \frac{1}{2} \sum s(c)$$



- Remarque: l'enlacement modulo 2, ne dépend pas de l'orientation.

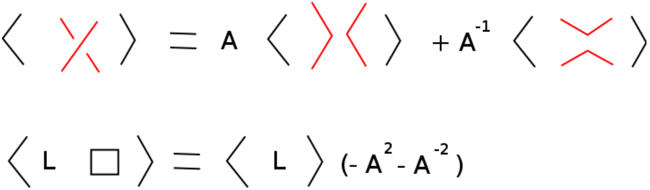
Le graphe K6



Invariants

On peut construire des invariants avec des fonctions sur les diagrammes compatibles avec les mouvements de Reidemeister.

- Le crochet de Kauffman (variante du polynôme de Jones):
  Il existe un unique invariant $\langle L \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ des entrelacs en ruban, qui vaut 1 pour l'entrelacs vide, et tel que:

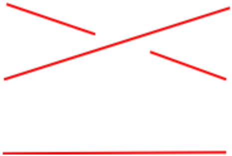


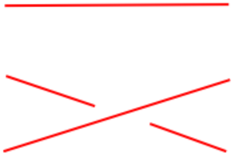
Groupes de tresses

- Deux tresses à trois brins:

Groupes de tresses

- Deux tresses à trois brins:





- Le produit de ces deux tresses:

Groupes de tresses

Une définition du groupe de tresses B_n:

- Une tresse à n brins est un plongement PL de n intervalles orientés dans $[0,1] \times \mathbb{C}$,
  avec *temps* croissant: chaque intervalle est le graphe d'une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$,
  avec extrémités dans $\{0,1\} \times \{1,\ldots,n\}$,
  à équivalence combinatoire près (le mouvement *triangle*).

Groupes de tresses

Une définition du groupe de tresses B_n:

- Une tresse à n brins est un plongement PL de n intervalles orientés dans $[0,1] \times \mathbb{C}$,
avec *temps* croissant: chaque intervalle est le graphe d'une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$,
avec extrémités dans $\{0,1\} \times \{1,\ldots,n\}$,
à équivalence combinatoire près (le mouvement *triangle*).
- Le produit est donné par l'empilement.

Groupes de tresses

Une définition du groupe de tresses B_n:

- Une tresse à n brins est un plongement PL de n intervalles orientés dans $[0,1] \times \mathbb{C}$,
  avec *temps* croissant: chaque intervalle est le graphe d'une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$,
  avec extrémités dans $\{0,1\} \times \{1,\dots,n\}$,
  à équivalence combinatoire près (le mouvement *triangle*).
- Le produit est donné par l'empilement.
- On a un homomorphisme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$, le noyau est le groupe P_n des tresses pures.

Présentation des tresses

Le groupe de tresses B_n admet une présentation avec générateurs σ_i (croisement positif des brins i et $i+1$), $1 \leq i < n$, et relations:
$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i-j| \geq 2$,
$\sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_i = \sigma_{i-1} \sigma_i \sigma_{i-1}$, pour $1 < i < n$.

Fermeture des tresses

- Chaque tresse définit un entrelacs par fermeture.

Fermeture des tresses

- Chaque tresse définit un entrelacs par fermeture.
- Théorème (Alexander): Chaque entrelacs est fermeture d'une tresse.

Théorème de Markov

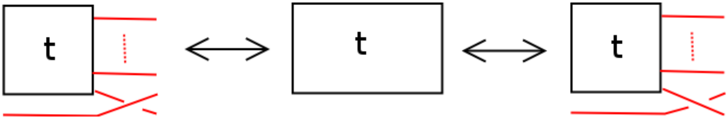
La relation sur les tresses correspondant à l'équivalence des fermetures est engendrée par

- la conjugaison

Théorème de Markov

La relation sur les tresses correspondant à l'équivalence des fermetures est engendrée par

- la conjugaison
- la stabilisation



Surface de Seifert

- Chaque entrelacs orienté borde une surface orientée (non unique)

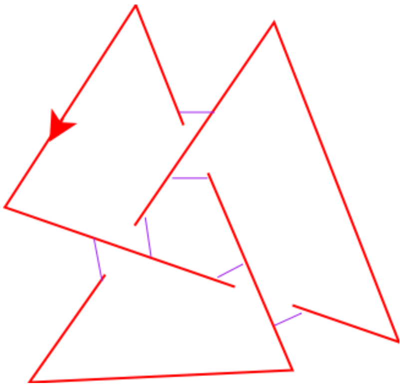
Surface de Seifert

- Chaque entrelacs orienté borde une surface orientée (non unique)
- Algorithme de Seifert (entrée: diagramme)
  1. On résout chaque croisement.
  2. Chaque cercle borde un disque ; on relève ces disques à $\mathbb{R}^3$ à des niveaux différents.
  3. On relie ces disques par des bandes correspondant aux croisements.

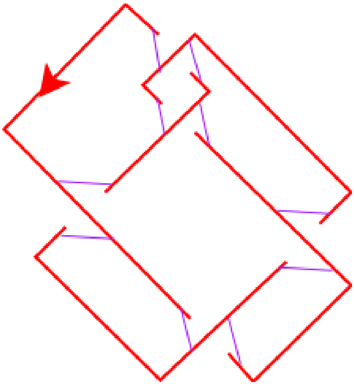
Surface de Seifert

- Chaque entrelacs orienté borde une surface orientée (non unique)
- Algorithme de Seifert (entrée: diagramme)
  1. On résout chaque croisement.
  2. Chaque cercle borde un disque ; on relève ces disques à $\mathbb{R}^3$ à des niveaux différents.
  3. On relie ces disques par des bandes correspondant aux croisements.
- Problème: trouver le genre minimal.

Surface de Seifert: le trèfle



Surface de Seifert: le huit



Algorithme de Vogel: définitions

- Deux cercles de Seifert ont des *orientations cohérentes* si et seulement s'ils engendrent la même classe d'homologie dans la bande délimitée par ces deux cercles (on ajoute ∞ si non bornée).

Algorithme de Vogel: définitions

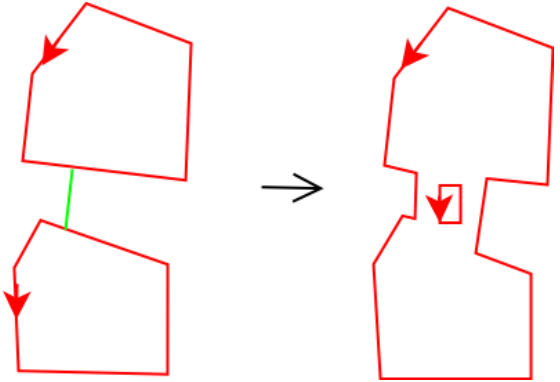
- Deux cercles de Seifert ont des *orientations cohérentes* si et seulement s'ils engendrent la même classe d'homologie dans la bande délimitée par ces deux cercles (on ajoute ∞ si non bornée).
- La *hauteur* d'un diagramme est le nombre de paires de cercles de Seifert avec des orientations incohérentes.

Algorithme de Vogel: définitions

- Deux cercles de Seifert ont des *orientations cohérentes* si et seulement s'ils engendrent la même classe d'homologie dans la bande délimitée par ces deux cercles (on ajoute ∞ si non bornée).
- La *hauteur* d'un diagramme est le nombre de paires de cercles de Seifert avec des orientations incohérentes.
- Un *arc réducteur* est un arc d'intérieur plongé dans le complémentaire des cercles de Seifert, avec ses extrémités sur des cercles d'orientations incohérentes.

Algorithme de Vogel: mouvement élémentaire

Si on a un arc réducteur, effectuer au voisinage de cet arc un mouvement de Reidemeister R2.



Algorithme de Vogel: théorème

- a) Si le diagramme est de hauteur nulle, alors c'est une tresse fermée.

Algorithme de Vogel: théorème

- a) Si le diagramme est de hauteur nulle, alors c'est une tresse fermée.
- b) Le mouvement élémentaire associé à un arc réducteur, réduit la hauteur de 1.

Algorithme de Vogel: théorème

- a) Si le diagramme est de hauteur nulle, alors c'est une tresse fermée.
- b) Le mouvement élémentaire associé à un arc réducteur, réduit la hauteur de 1.
- c) Si la hauteur est non nulle, alors il existe un arc réducteur.

Algorithme de Vogel: théorème

- a) Si le diagramme est de hauteur nulle, alors c'est une tresse fermée.
- b) Le mouvement élémentaire associé à un arc réducteur, réduit la hauteur de 1.
- c) Si la hauteur est non nulle, alors il existe un arc réducteur.

- Le théorème fournit un algorithme quadratique dans le nombre de croisements qui transforme un entrelacs donné par un diagramme en une tresse fermée.

Algorithme de Vogel: théorème

- a) Si le diagramme est de hauteur nulle, alors c'est une tresse fermée.
- b) Le mouvement élémentaire associé à un arc réducteur, réduit la hauteur de 1.
- c) Si la hauteur est non nulle, alors il existe un arc réducteur.

- Le théorème fournit un algorithme quadratique dans le nombre de croisements qui transforme un entrelacs donné par un diagramme en une tresse fermée.
- Il démontre que le nombre minimal de cercles de Seifert est égal au nombre minimal de brins: *braid index*.
  Problème: déterminer ce nombre.

Noeud de huit