Journées de Géométrie Algorithmique

Sur quelques problèmes algorithmiques en théorie des noeuds

Christian Blanchet

28 janvier 2005

Références

- J. Hass, J. Lagarias, N. Pippenger, *The Computational Complexity of Knot and link problems*, arXiv:math.GT/9807016
- I. Dynnikov, *Recognition algorithms in knot theory*, Russian Math. Survey, 58:6 1093–1139.
- S. Matveev, *Algorithmic Topology and classification of 3-manifolds.* Springer 2003.

Références

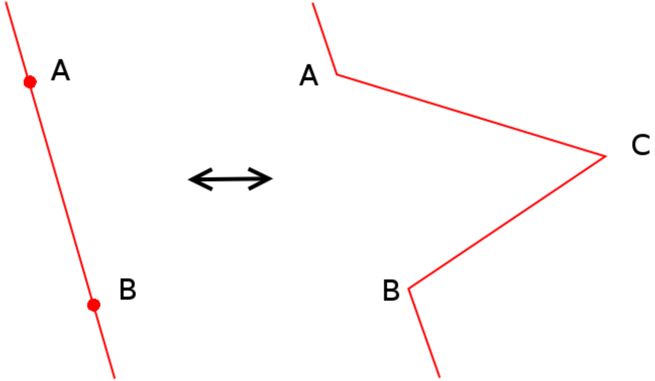
- G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, De Gruyter 1985.
- P. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge 2004.
- L. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific 1991.
- D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish 1976.

Noeuds polygonaux

- Noeud polygonal (PL) dans $\mathbb{R}^3$:
  réunion de segments formant une ligne fermée
- plus mathématique: plongement PL du cercle
- plusieurs composantes: entrelacs

Equivalence combinatoire

- Remplacer un segment par les deux autres côtés d'un triangle
  L'intersection de l'entrelacs avec le triangle est le segment $[AB]$



Groupes de tresses

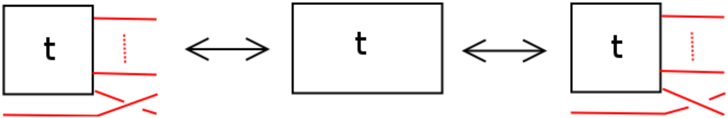
Une définition du groupe de tresses B_n:

- Une tresse à n brins est un plongement PL de n intervalles orientés dans $[0,1] \times \mathbb{C}$,
  avec *temps* croissant: chaque intervalle est le graphe d'une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$,
  avec extrémités dans $\{0,1\} \times \{1,\ldots,n\}$,
  à équivalence combinatoire près (le mouvement *triangle*).

Théorème de Markov

La relation sur les tresses correspondant à l'équivalence des fermetures est engendrée par

- la conjugaison
- la stabilisation

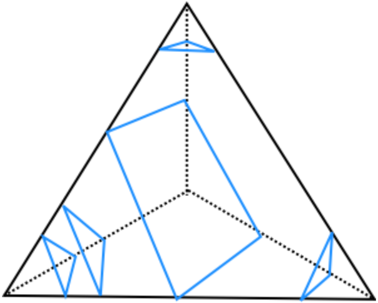


Surfaces normales

- Dans une variété de dimension 3 compacte triangulée (par exemple le complémentaire du voisinage tubulaire ouvert d'un noeud), on appelle *surface normale* une surface dont l'intersection avec chaque tétraèdre consiste en triangles et quadrangles à sommets sur des arêtes distinctes.

Surfaces normales

- Dans une variété de dimension 3 compacte triangulée (par exemple le complémentaire du voisinage tubulaire ouvert d'un noeud), on appelle *surface normale* une surface dont l'intersection avec chaque tétraèdre consiste en triangles et quadrangles à sommets sur des arêtes distinctes.



Surfaces normales

- Pour chaque tétrèdre, on a 7 types de disques élémentaires.
  Avec t tétraèdres: à une surface normale F, on associe $7t$ entiers: les coordonnées normales.
  Les coordonnées normales déterminent la surface.

Surfaces normales

- Pour chaque tétrèdre, on a 7 types de disques élémentaires.
  Avec t tétraèdres: à une surface normale F, on associe $7t$ entiers: les coordonnées normales.
  Les coordonnées normales déterminent la surface.
- Un vecteur $x \in \mathbb{Z}^{7t}$ correspond à une (unique) surface si et seulement si:
  les x_i sont positifs ou nuls,
  contraintes linéaires pour chaque face,
  pour chaque tétraèdre: un seul type de quadrangle ($x_i x_j = 0$)

Surfaces normales

- Une solution fondamentale est une solution qui ne se décompose pas en somme non triviale.
  L'ensemble des solutions fondamentales est fini et calculable avec un algorithme.

Surfaces normales

- Une solution fondamentale est une solution qui ne se décompose pas en somme non triviale.
  L'ensemble des solutions fondamentales est fini et calculable avec un algorithme.
- Théorème: Pour un complément de noeud triangulé, il existe une surface normale fondamentale qui réalise une surface de Seifert de genre minimal.

Reconnaissance du noeud trivial

- Entrée: un diagramme plan à c croisements.
  Décider si ce noeud est trivial.

Reconnaissance du noeud trivial

- Entrée: un diagramme plan à c croisements.
  Décider si ce noeud est trivial.
- La méthode de Haken fournit un algorithme qui montre que le problème est dans NP ($O(2^{kc})$) .

Comparaison de noeuds

- Entrée: deux noeuds donnés par des diagrammes (au plus c croisements).
  Décider si les deux noeuds sont équivalents.

Comparaison de noeuds

- Entrée: deux noeuds donnés par des diagrammes (au plus c croisements).
  Décider si les deux noeuds sont équivalents.
- La méthode de Haken fournit un algorithme de complexité $O(2^{kc^2})$.

Fermeture dans l'anneau

- Deux tresses sont conjuguées si et seulement si elles ont des fermetures équivalentes dans l'anneau.

Fermeture dans l'anneau

- Deux tresses sont conjuguées si et seulement si elles ont des fermetures équivalentes dans l'anneau.
- Problème: Trouver un algorithme efficace qui décide si deux tresses positives (dont tous les croisements sont positifs) ont des fermetures équivalentes dans l'anneau.

Problème du mot pour les tresses

- Entrée: Deux mots dans les générateurs standards σ_i. Décider si ces mots représentent le même élément du groupe B_n ?

Problème du mot pour les tresses

- Entrée: Deux mots dans les générateurs standards σ_i. Décider si ces mots représentent le même élément du groupe B_n ?
- On dispose de plusieurs algorithmes efficaces.

Point de vue géométrique

- Théorème (Artin). Le groupe B_n est isomorphe au groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes du disque avec n points marqués.

$$B_n \approx \mathcal{M}_{0,1,n} = \pi_0(\mathit{Diff}(\Sigma_{0,1,n}))$$

Point de vue géométrique

- Théorème (Artin). Le groupe B_n est isomorphe au groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes du disque avec n points marqués.

$$B_n \approx \mathcal{M}_{0,1,n} = \pi_0(\mathit{Diff}(\Sigma_{0,1,n}))$$

- $\mathcal{M}_{0,1,n}$ agit sur le groupe libre $F_n = \pi_1(\Sigma_{0,1,n})$, et cette représentation est fidèle.

Forme de Garside

- On note B_n^+ le monoïde engendrée par les générateurs σ_i (tresses positives).

Forme de Garside

- On note B_n^+ le monoïde engendrée par les générateurs σ_i (tresses positives).
- Il y a sur B_n^+ une notion de lgcd (plus grand diviseur commun à gauche).

Forme de Garside

- On note B_n^+ le monoïde engendrée par les générateurs σ_i (tresses positives).
- Il y a sur B_n^+ une notion de lgcd (plus grand diviseur commun à gauche).
- A chaque permutation τ, on associe la tresse positive correspondante w_τ (tresse de permutation).

Forme de Garside

- On note B_n^+ le monoïde engendrée par les générateurs σ_i (tresses positives).
- Il y a sur B_n^+ une notion de lgcd (plus grand diviseur commun à gauche).
- A chaque permutation τ, on associe la tresse positive correspondante w_τ (tresse de permutation).
- Δ: la tresse positive associée à la permutation de plus grande longeur. L'ensemble des diviseurs (à gauche) de Δ est l'ensemble des tresses de permutation.

Forme de Garside

- Chaque tresse t a une écriture unique (forme normale):

$$t = \Delta^n w_{\tau_1} w_{\tau_2} \dots w_{\tau_k}$$

$$n \in \mathbb{Z},\ \ w_{\tau_i} = lgcd(\Delta, w_{\tau_i} \dots w_{\tau_k})$$

Forme de Garside

- Chaque tresse t a une écriture unique (forme normale):

$$t = \Delta^n w_{\tau_1} w_{\tau_2} \dots w_{\tau_k}$$

$$n \in \mathbb{Z},\ \ w_{\tau_i} = lgcd(\Delta, w_{\tau_i} \dots w_{\tau_k})$$

- Solution au problème du mot en $O(l^2 n \ln(n))$

Utilisation de l'ordre de Dehornoy

- Théorème: Chaque tresse t peut s'écrire:
  soit avec uniquement des σ_1 d'exposant positif,
  soit avec uniquement des σ_1 d'exposant négatif,
  soit sans σ_1, et dans ce cas, idem avec σ_2, ...

Utilisation de l'ordre de Dehornoy

- Théorème: Chaque tresse t peut s'écrire:
  soit avec uniquement des σ_1 d'exposant positif,
  soit avec uniquement des σ_1 d'exposant négatif,
  soit sans σ_1, et dans ce cas, idem avec σ_2, ...
- Solution au problème du mot avec complexité comparable à l'algorithme précédent. En pratique très efficace.

Le problème de conjugaison

- Entrée: Deux mots dans les générateurs standards σ_i.

Le problème de conjugaison

- Entrée: Deux mots dans les générateurs standards σ_i.
- Décider si ces mots représentent des éléments conjugués du groupe B_n.

Le problème de conjugaison

- Entrée: Deux mots dans les générateurs standards σ_i.
- Décider si ces mots représentent des éléments conjugués du groupe B_n.
- Si oui, trouver un élément qui les conjuguent.

Algorithme de Garside pour la conjugaison

Infimum: $inf(t) = max\{m,\ \Delta^{-m} t \in B_n^+\}$
Summit: $\mathcal{S}(t) = \{b = a^{-1}ta,\ inf(b) = max\{inf(c^{-1}tc),\ c \in B_n\}$.

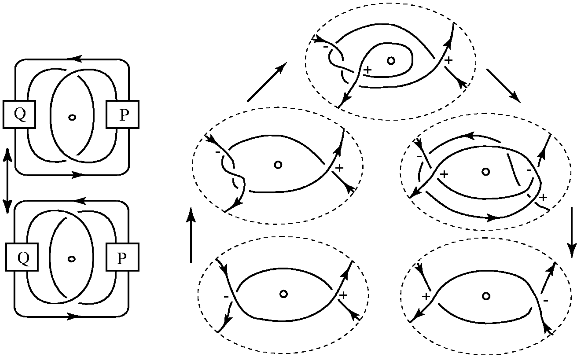
- Théorème: a) $\mathcal{S}(t)$ est fini.
  b) t et t' sont conjugués si et seulement si $\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}(t')$.
  c) Il existe un algorithme qui détermine $\mathcal{S}(t)$ en temps fini (exponentiel dans la longueur du mot, écrit avec les générateurs standards).

Le problème de la stabilisation

- Dans la théorème de Markov, on ne maîtrise pas le nombre de stabilisations requises.

Le problème de la stabilisation

- Dans la théorème de Markov, on ne maîtrise pas le nombre de stabilisations requises.
- Birman et Menasco propose un mouvement additionnel: mouvement d'échange.



Trivialité via les tresses fermées

- Théorème: Si une tresse a pour fermeture le noeud trivial, alors on peut la réduire à la tresse triviale à 1 brin, par conjugaison, échange et déstabilisation.

Trivialité via les tresses fermées

- Théorème: Si une tresse a pour fermeture le noeud trivial, alors on peut la réduire à la tresse triviale à 1 brin, par conjugaison, échange et déstabilisation.
- Algorithme (très grande complexité) pour reconnaître le noeud trivial.

Diagramme rectangulaire

- Un diagramme de noeud est *rectangulaire* si
  il est composé de segments parallèles aux axes 2 à 2 non alignés,
  les segments verticaux passent toujours au-dessus.

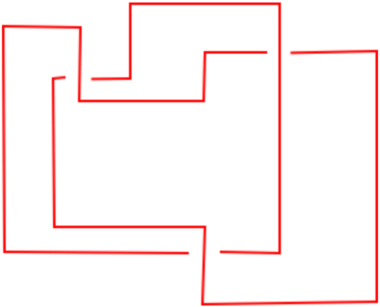


Diagramme rectangulaire

- Un diagramme de noeud est *rectangulaire* si
  il est composé de segments parallèles aux axes 2 à 2 non alignés,
  les segments verticaux passent toujours au-dessus.