Fonctions distances Applications en stabilité/approximation topologique

Frédéric Chazal

Equipe Applications des Mathématiques

Institut de Mathématiques de Bourgogne (UMR 5584 CNRS)

Introduction

Motivations

- Les fonctions distances (à des objets non lisses) apparaissent souvent et naturellement en géométrie appliquée (offsets, diagrammes de Voronoï et axes médians,...).
- Les fonctions distances à des fermés ont déjà été largement étudiées et utilisées dans d'autres branches des mathématiques (géométrie riemannienne : Grove-Shioama, Gromov,... - analyse non lisse - ...)
  $\Rightarrow$ existence de nombreux outils pouvant être utiles en géométrie/topologie appliquée.

Introduction

Objectifs

- Présenter quelques unes des propriétés des fonctions distances à des fermés dans $\mathbb{R}^n$: points critiques, analogie avec les fonctions différentiables.
- Montrer, sur quelques exemples, comment ces propriétés peuvent être utilisées pour aborder des questions de stabilité et d'approximation topologique (importantes en géométrie/topologie appliquée).

Plan du cours

- Points critiques = Positions d'équilibre
  - Définition des points réguliers/critiques
  - Champ de vecteurs gradient
- Analogies avec les fonctions différentiables
  - Champs de vecteurs transverses
  - Théorèmes des fonctions implicites, d'isotopie,...
- Quelques applications en stabilité et approximation topologique.
  - Stabilité des types d'homotopie (et isotopie en dim 3)
  - Finitude des types d'homotopie
  - Régularisation de solides

Points critiques

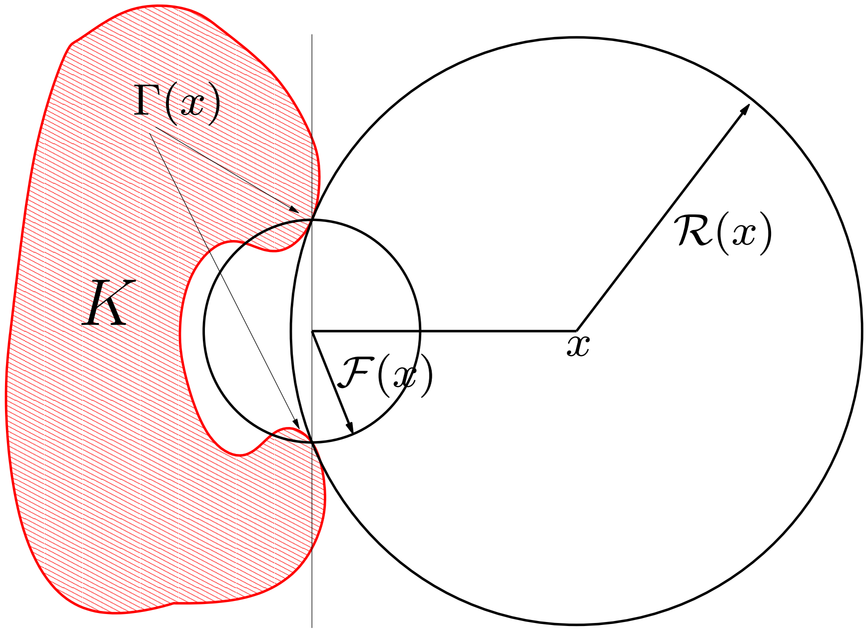
=

Positions d’équilibres

Quelques notations et définitions

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact.

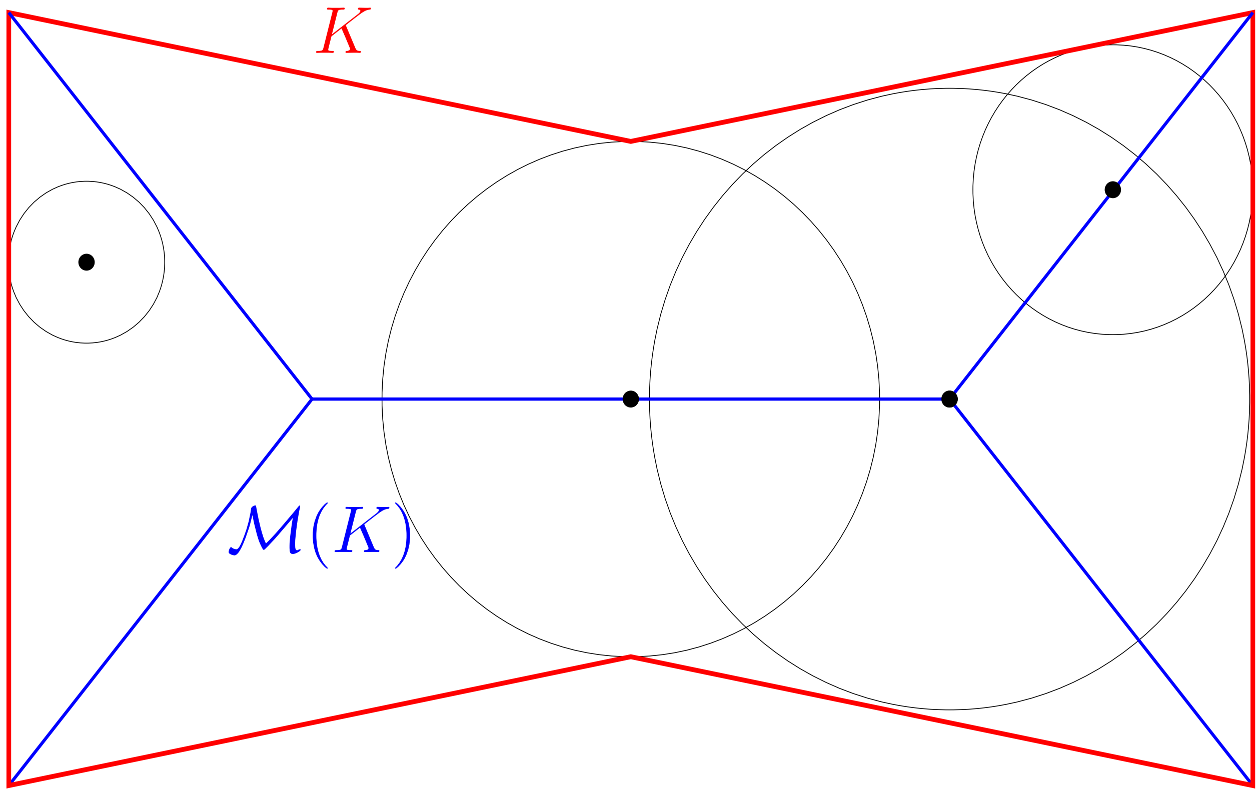
$$\mathcal{R}(x) = d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)$$



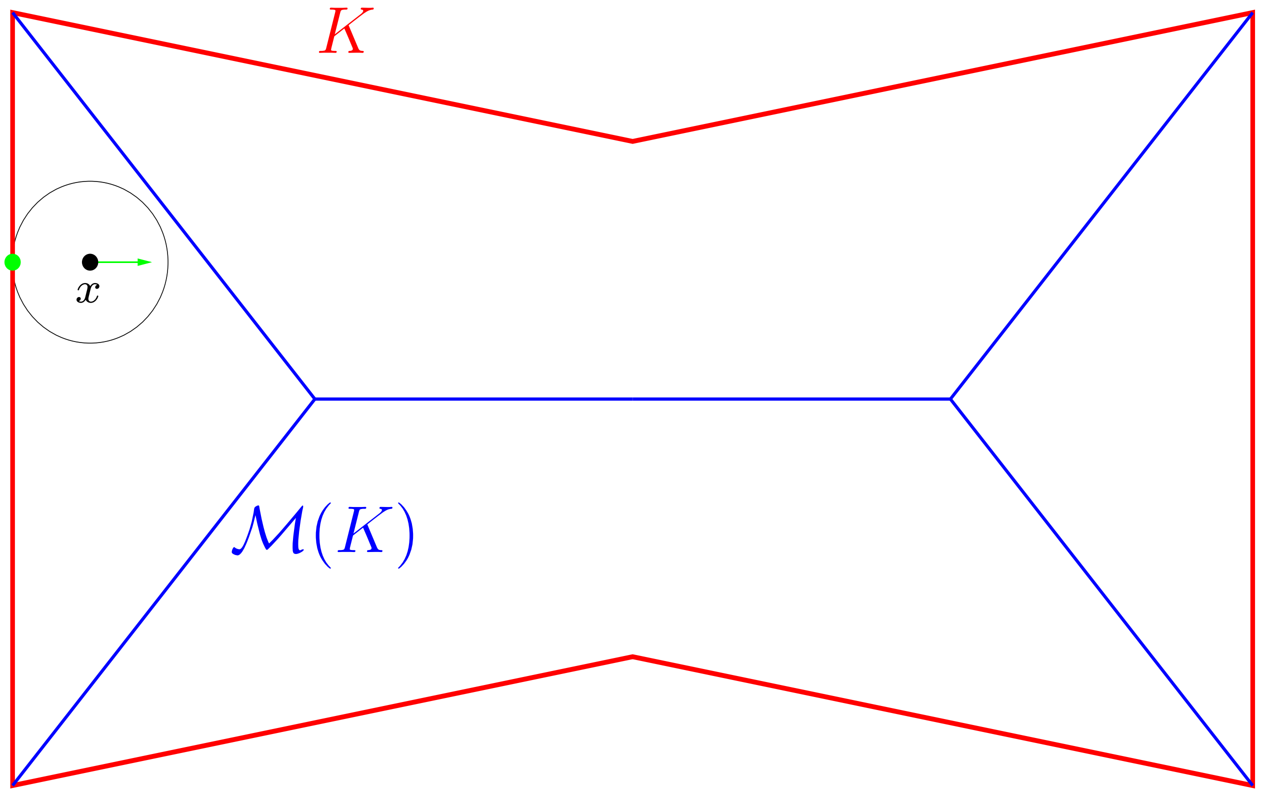
$$\Gamma(x) = \{y \in K : d(x, y) = d(x, K)\}$$

Axe médian : $\mathcal{M}(K) = \{x \in \mathbb{R}^n :\mid \Gamma(x) \mid \geq 2\}$.

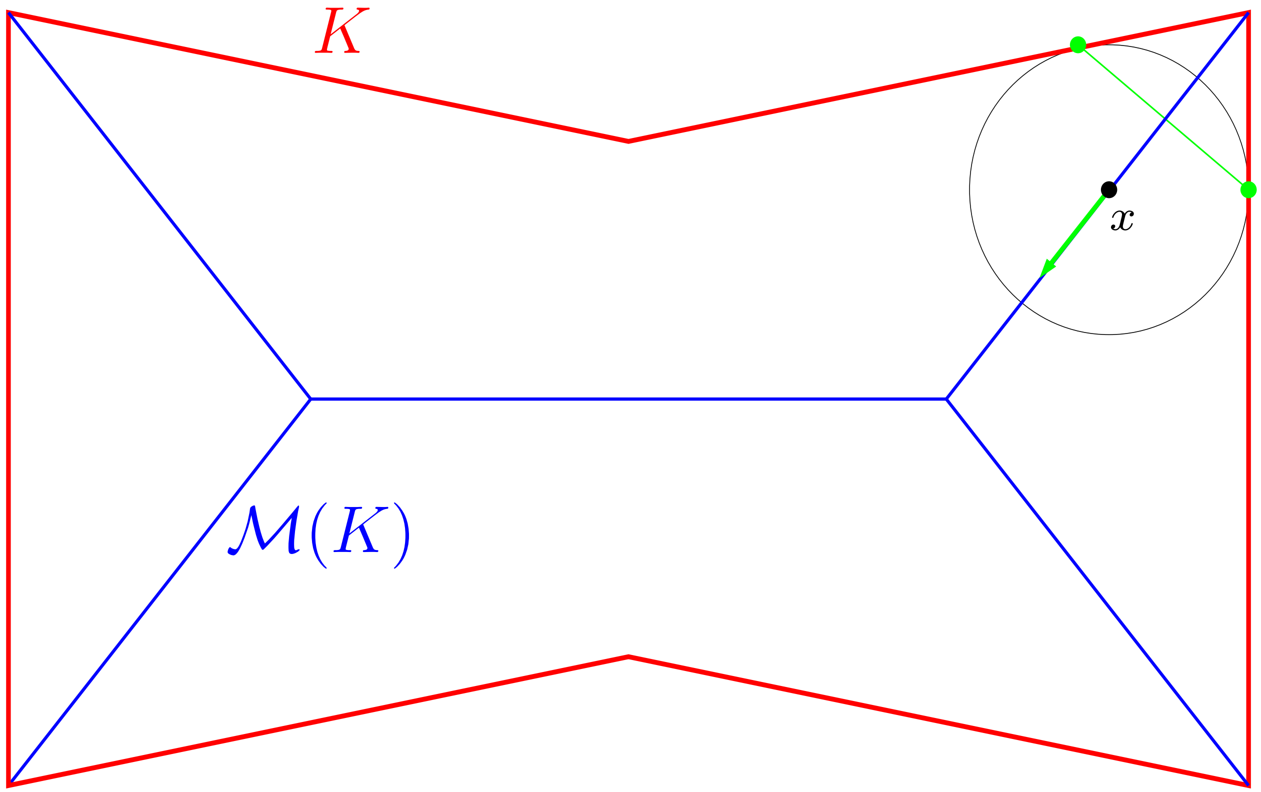
Exemple de fonction distance



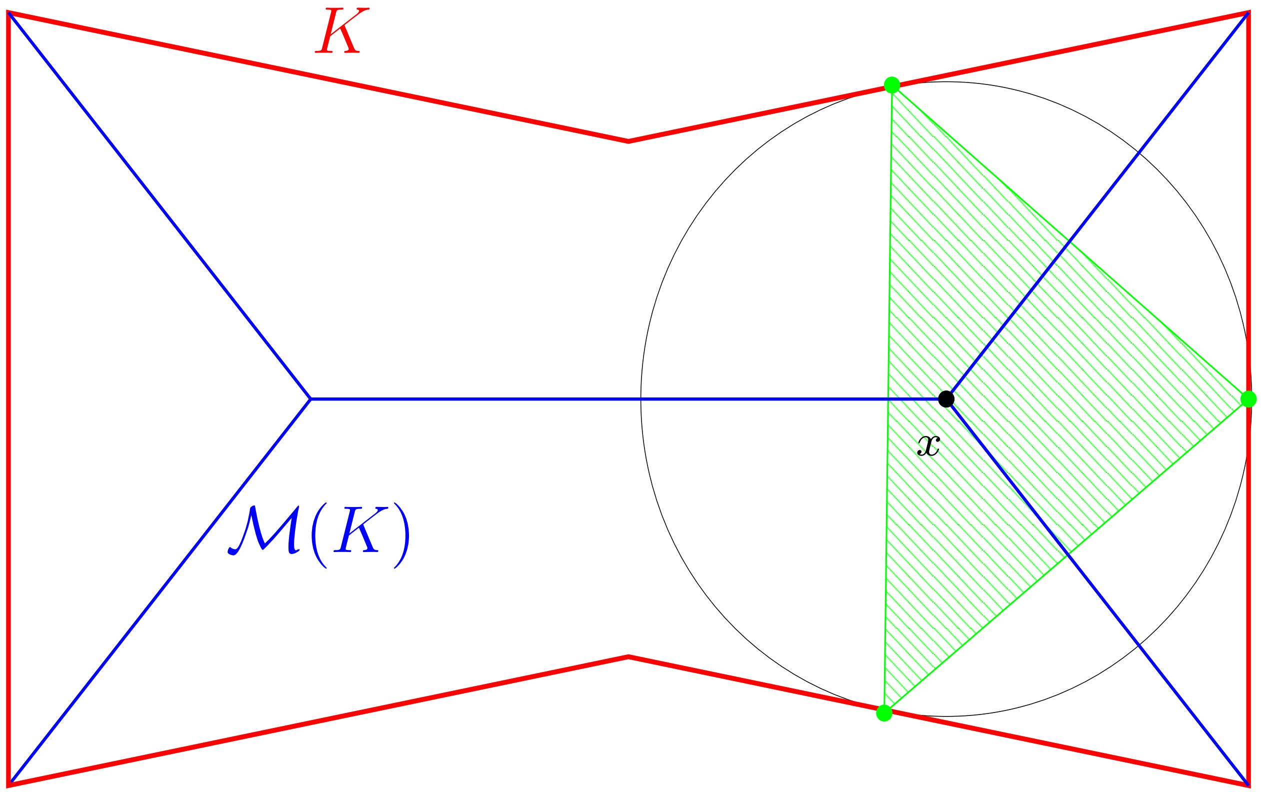
Point régulier



Point régulier

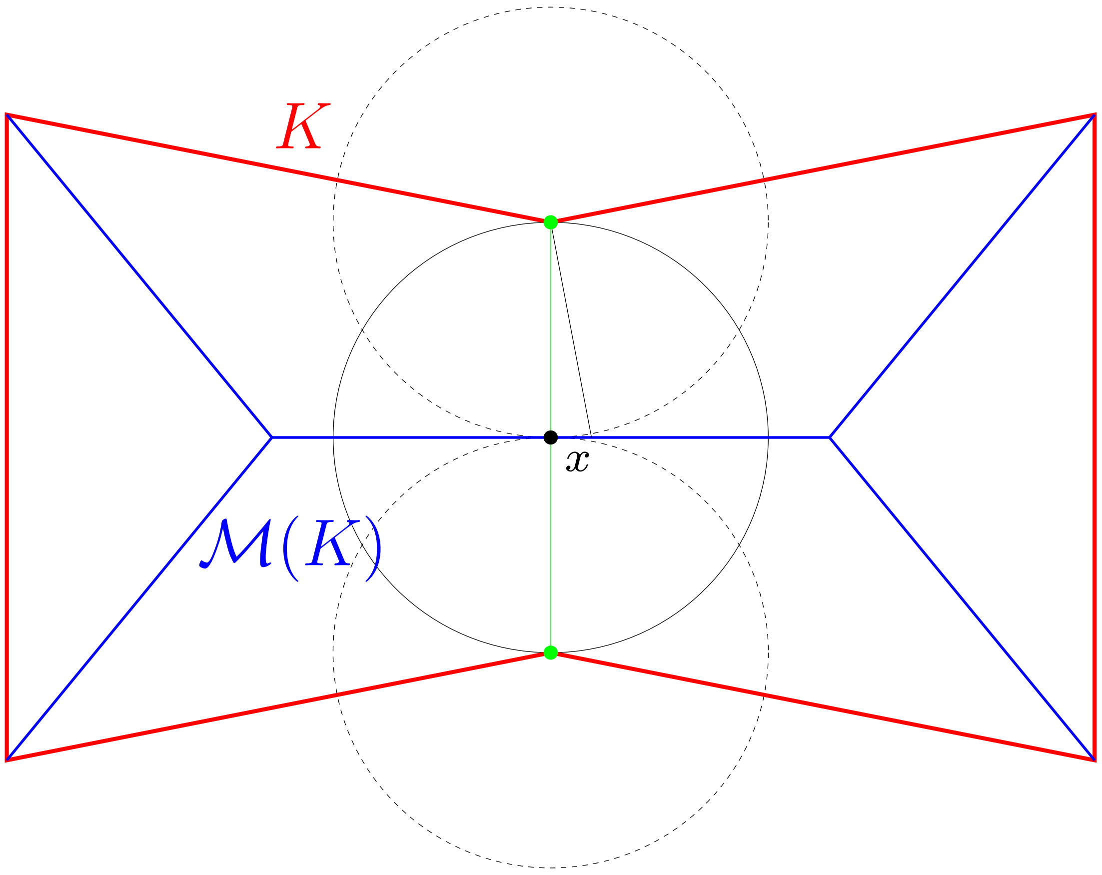


Point singulier



- "Point critique = Position d'équilibre"
- "Impossible de s'éloigner de K depuis x"

Point singulier



"Impossible de s'éloigner linéairement de K depuis x avec vitesse non nulle"

Définition des points réguliers de $\mathcal{R}$

Proposition-Définition: x est un point régulier de $\mathcal{R}$ s'il vérifie l'une des quatre conditions équivalentes suivantes :

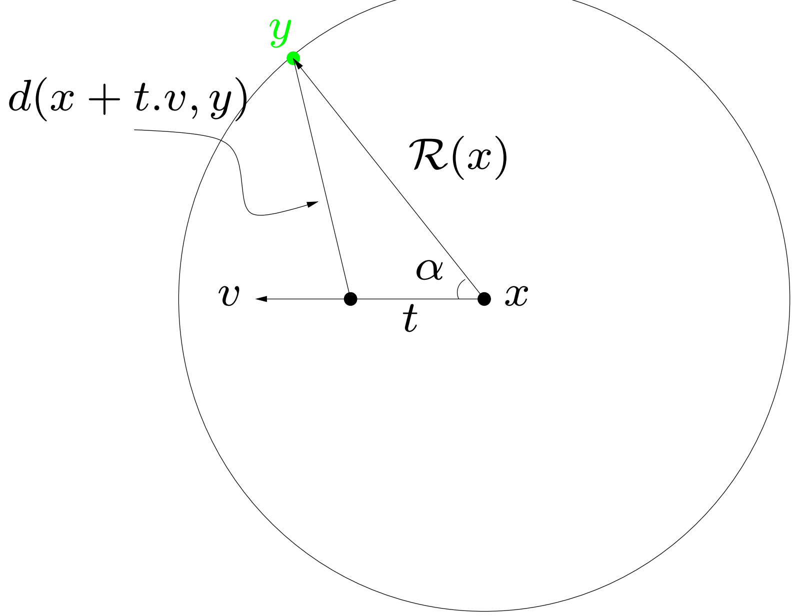
1. $\Gamma(x)$ est contenu dans un hémisphère ouvert de $\mathbb{B}(x, \mathcal{R}(x))$.
2. $x \notin \text{Conv}(\Gamma(x))$.
3. Il existe un vecteur unitaire $v \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $y \in \Gamma(x)$, $\widehat{(xy, v)} > \frac{\pi}{2}$.
4. Il existe un vecteur unitaire $v \in \mathbb{R}^n$ et un réel $c > 0$ tel que $\mathcal{R}(x + tv) \geq \mathcal{R}(x) + c.t$ pour tout $t > 0$ suffisamment petit.

Remarques sur la notion de point critique

- x est un point critique de $\mathcal{R}$ si et ssi il est contenu dans l'enveloppe convexe de $\Gamma(x)$.
- La notion de point critique définie ici coïncide avec celle définie en géométrie riemannienne pour les fonctions "distance à un point".
- Elle coïncide aussi avec celle de point critique des fonctions localement lipschitziennes en analyse non lisse et en optimisation.

Preuve de $4 \Longrightarrow 3$

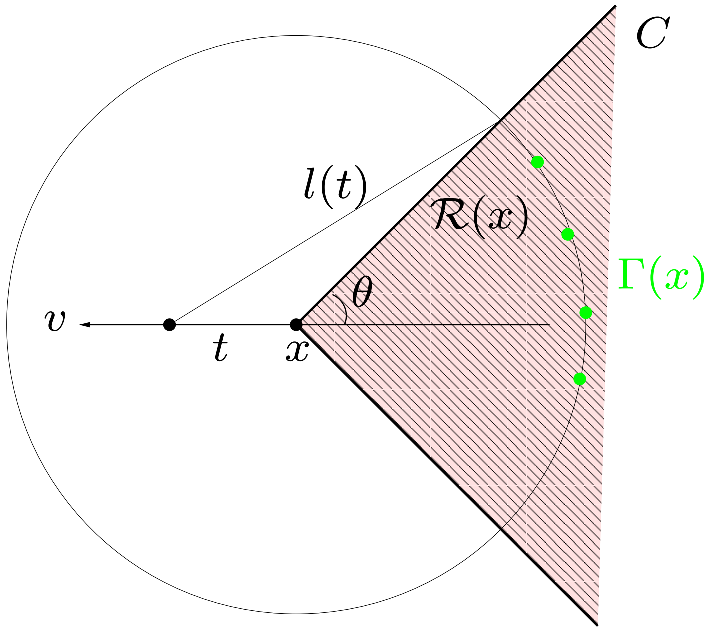
Supposons qu'il existe
$y \in \Gamma(x)$ tel que
$\widehat{(xy, v)} = \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.



$$\begin{aligned}\mathcal{R}(x+t.v) \leq d(x+t.v, y) &= \sqrt{\mathcal{R}^2(x) + t^2 - 2t\mathcal{R}(x)\cos\alpha} \\ &\leq \mathcal{R}(x) \text{ pour } t < 2\mathcal{R}(x)\cos\alpha\end{aligned}$$

Preuve de $3 \Longrightarrow 4$

- $\Gamma(x)$ est fermé $\Rightarrow$ il existe $\theta < \pi/2$ tel que le cône ouvert C de sommet x, d'axe v et de demi-angle au sommet θ contienne $\Gamma(x)$.

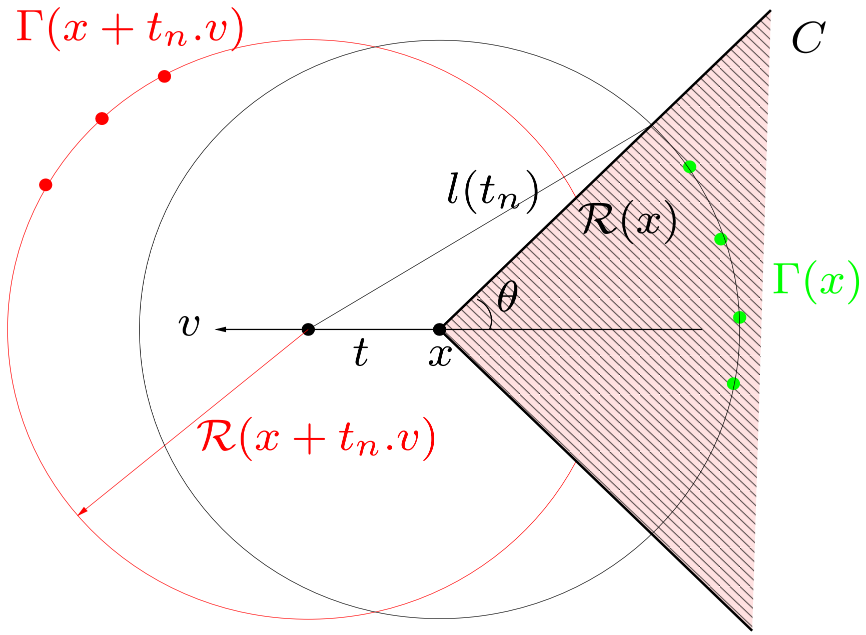


Affirmation : Pour tout $t > 0$ assez petit, on a $\mathcal{R}(x + t.v) \geq \mathcal{R}(x) + t\cos\theta$.

Preuve : $l(t) = \sqrt{\mathcal{R}^2(x) + 2t\mathcal{R}(x)\cos\theta + t^2} \geq \mathcal{R}(x) + t\cos\theta$ pour t assez petit + argument de compacité.

Preuve de l'affirmation

Supposons qu'il existe une suite de réels $t_n \to 0$ qui ne satisfont pas l'affirmation : $\mathcal{R}(x + t_n.v) \leq \mathcal{R}(x) + t_n \cos\theta$.



$l(t_n) \geq \mathcal{R}(x) + t_n \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x + t_n.v) \subset (\mathbb{B}(x) \cup C)^c$

Compacité : il existe $y_n \in \Gamma(x + t_n.v) \to y \in (\mathbb{B}(x) \cup C)^c$.

Or, $d(x + t_n.v, y_n) = \mathcal{R}(x + t_n.v) \to \mathcal{R}(x)$

Donc $y \in \Gamma(x) \cap C^c$: contradiction!

Un corollaire

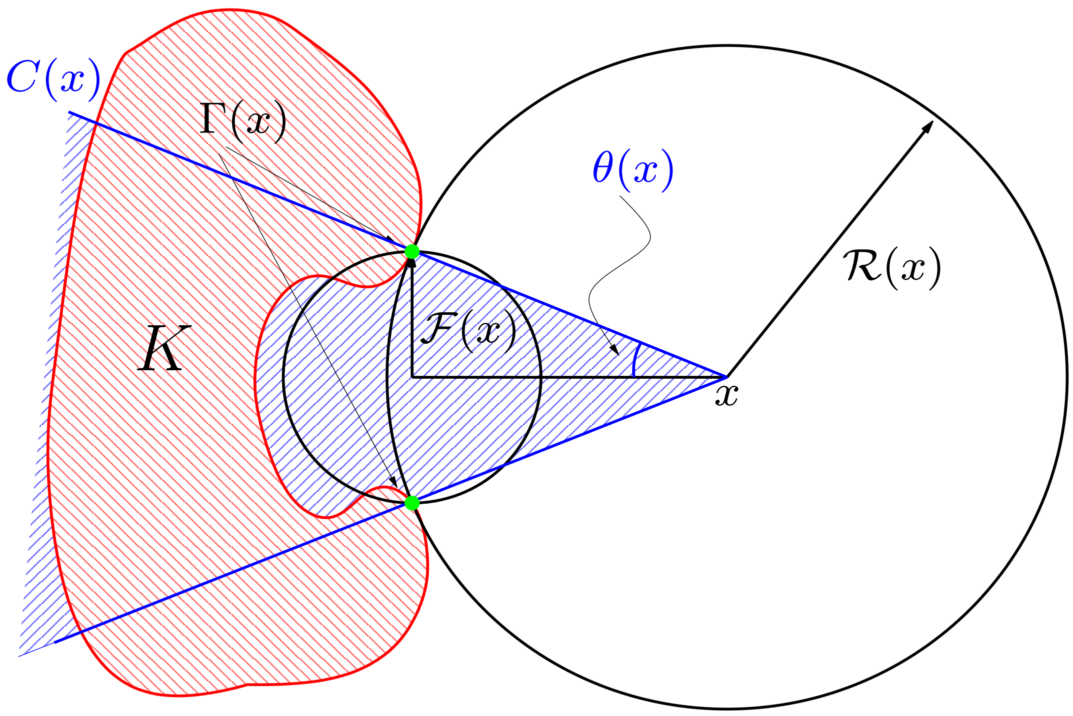
Corollaire. Soit $t \longrightarrow \alpha(t)$, $t \in [a,b]$ un chemin tel qu'il existe $0 < \theta < \pi/2$ vérifiant

$$\forall t \in [a,b],\ \forall y \in \Gamma(x),\ \ (\widehat{\alpha(t)y, \alpha'}(t)) > \frac{\pi}{2} + \theta.$$

Alors, pour tout $t \in [a,b]$,

$$\mathcal{R}(\alpha(t)) \geq \mathcal{R}(\alpha(0)) + t.\cos(\frac{\pi}{2} - \theta).$$

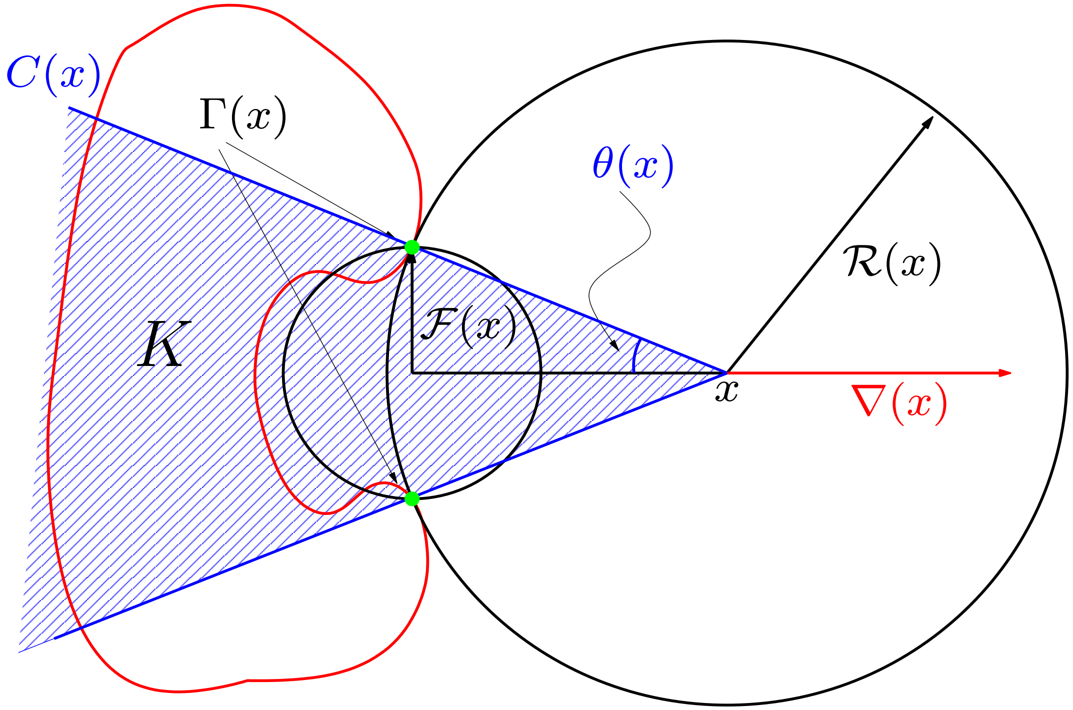
Angle sous lequel on voit $\Gamma(x)$



$$\mathcal{F}(x) = \inf\{r \geq 0 : \exists y \in \mathbb{R}^n,\ \mathbb{B}_{y,r} \supset \Gamma(x)\}$$

$$\sin\theta(x) = \frac{\mathcal{F}(x)}{\mathcal{R}(x)}$$

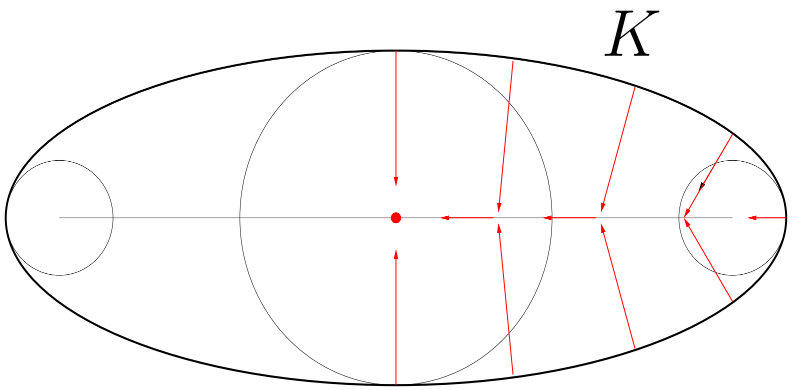
champ de vecteurs gradient de $\mathcal{R}$



$\nabla(x)$: dirigé par l'axe du cone $C(x)$, orienté dans le sens "$\mathcal{R}$ croissant".

$\|\nabla(x)\| = \cos\theta(x)$ si x point régulier et $\|\nabla(x)\| = 0$ si x point critique.

Propriété du champ ∇



- Bien que ∇ soit discontinu, on peut l'intégrer (Lieutier): il existe $\mathfrak{C} : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ une fonction continue, dérivable à droite par rapport à t telle que

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t}(t,x) = \nabla(\mathfrak{C}(t,x)) \text{ et } \mathfrak{C}(t+s,x) = \mathfrak{C}(s,\mathfrak{C}(t,x)) \ .$$

- Les fonctions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{F}$ sont croissantes le long des trajectoires de ∇.

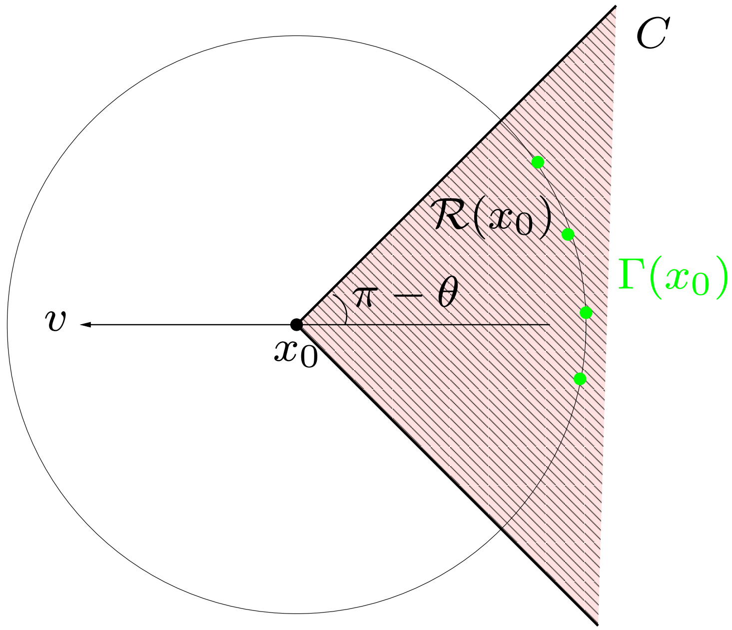
Avantages et inconvénients de ∇

- L'existence d'un flot continu pour ∇ permet de montrer la préservation d'invariants topologiques lorsqu'on "pousse" K^c par le flot...
- ... mais la non-continuité de ∇ ne permet pas de préserver "l'homéomorphie".

$\Longrightarrow$ Pour établir des analogies entre les fonctions distances et les fonctions lisses, on a besoin de construire un champ $\mathcal{C}^1$ "transverse" à $\mathcal{R}$.

Analogies avec les fonctions différentiables

Champ de vecteurs transverse



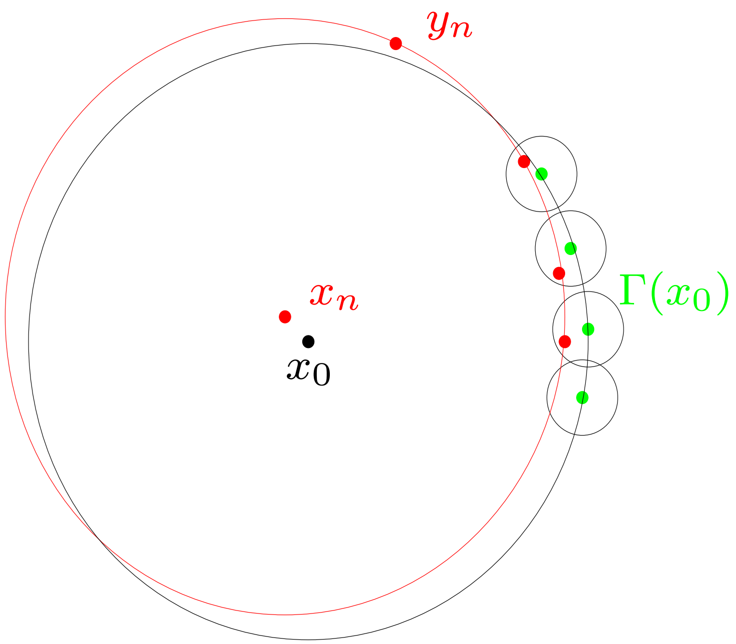
Lemme. *Soit x_0 un point régulier de $\mathcal{R}$ et soit v un vecteur tel que pour tout $y \in \Gamma(x_0)$, $\widehat{(x_0 y, v)} > \frac{\pi}{2}$. Il existe $\theta > \frac{\pi}{2}$ et un voisinage ouvert U de x_0 tel que pour tout $x \in U$ et pour tout $y \in \Gamma(x)$, $\widehat{(xy, v)} \geq \theta$.*

Preuve du lemme

Aff. : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0$ tel que
$d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow \Gamma(x) \subset \Gamma(x_0) \oplus \mathbb{B}(0, \varepsilon)$.

Preuve de l'affirmation (par l'absurde) :

- $\exists\varepsilon > 0$, $\exists x_n \to x_0$ et
  $\exists y_n \in \Gamma(x_n)$ tel que
  $y_n \notin \Gamma(x_0) \oplus \mathbb{B}(0, \varepsilon)$.
- Quitte à extraire une sous-suite + continuité de $\mathcal{R}$:
  $y_n \to y \in \Gamma(x_0)$ et
  $y \notin \Gamma(x_0) \oplus \mathbb{B}(0, \varepsilon)$.



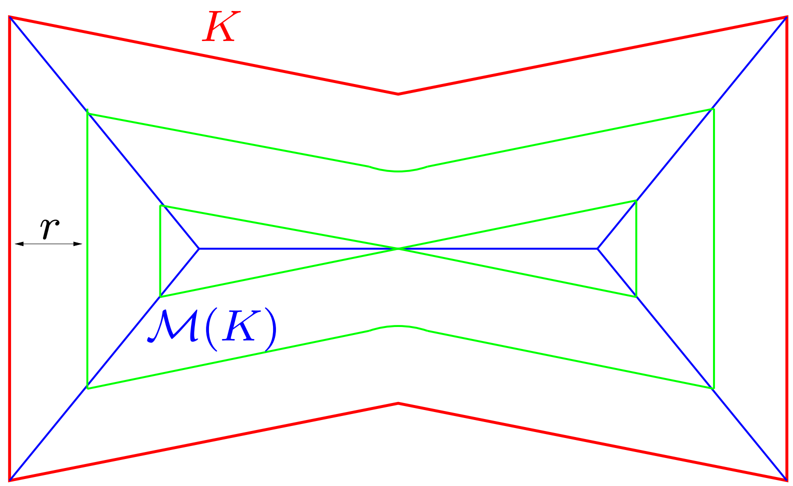
Champ de vecteurs transverse lisse

- Le lemme précédent permet de construire un champ de vecteurs constant “transverse” aux niveaux de $\mathcal{R}$ au voisinage de chaque point régulier.
- Partition de l’unité $\rightarrow$ construction d’un champ lisse X sur $\mathbb{R}^n \setminus \mathsf{Crit}(\mathcal{R})$.
- La fonction $\mathcal{R}$ est strictement croissante (p.p. dérivable à dérivée strictement positive) le long des trajectoires de X.
- Pour tout compact $A \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathsf{Crit}(\mathcal{R})$, il existe $\theta_A > \pi/2$ tel que
$$\forall x \in A,\ \forall y \in \Gamma(x),\quad (\widehat{xy, X(x)}) \geq \theta_A.$$

Théorème des fonctions implicites

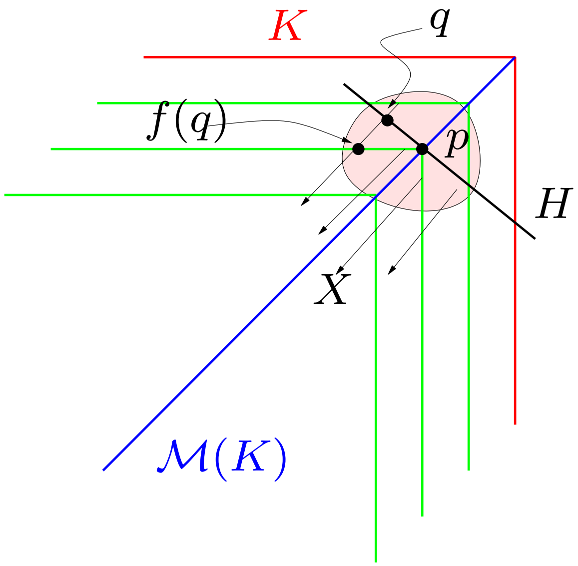
Théorème. Soit r une valeur régulière de $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}^{-1}(r) \cap \mathrm{Crit}(\mathcal{R}) = \emptyset$. L'ensemble $\mathcal{R}^{-1}(r)$ est une sous-variété topologique de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.

Idée de la preuve : Redresser localement $\mathcal{R}^{-1}(r)$ sur un hyperplan à l'aide du champ transverse X.



Preuve du théorème

Soit $p \in \mathcal{R}^{-1}(r)$. Il existe un voisinage U de p et un réel $\theta > \frac{\pi}{2}$ vérifiant

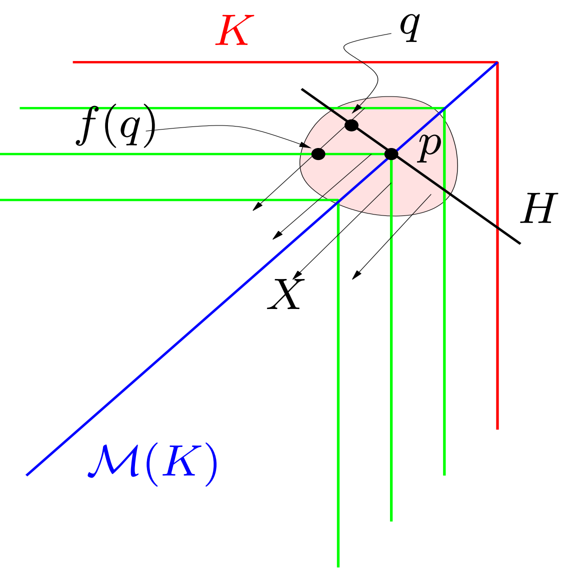


$$\forall x \in U,\ \forall y \in \Gamma(x),\ (\widehat{xy, X(x)}) > \theta$$

- Soit H un morceau d'hyperplan transverse à X au voisinage de p
- $\exists \varepsilon > 0$ t.q. le flot de X définit un difféomorphisme $\varphi : H \times]-\varepsilon, +\varepsilon[\to V$ où V est un voisinage ouvert de p.

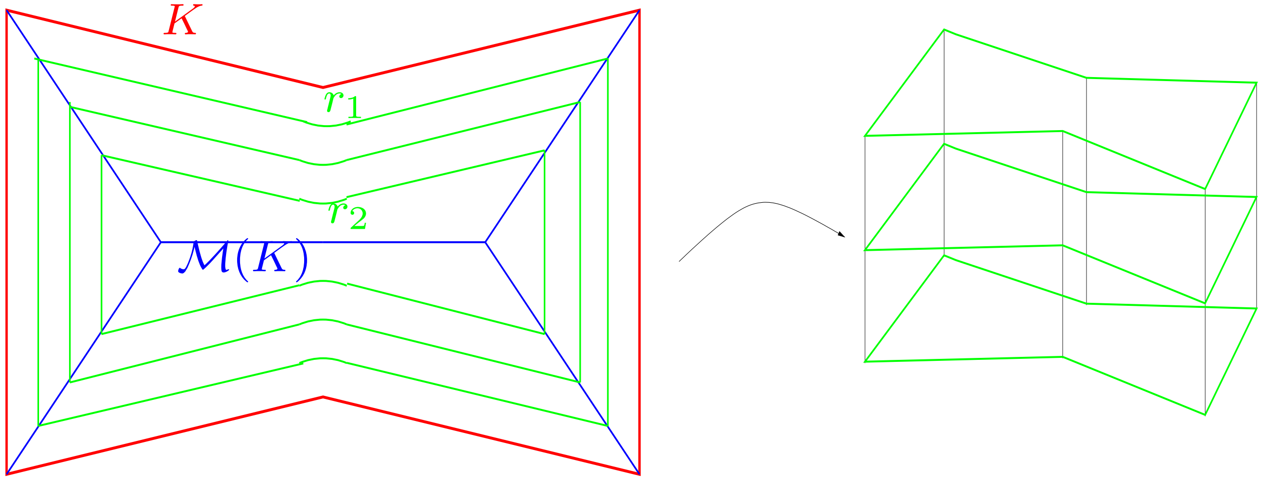
Preuve du théorème (suite)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(\varphi(p,\varepsilon)) &\geq \mathcal{R}(\varphi(p,0)) + \varepsilon\cos(\pi-\theta)\\
&= r + \varepsilon\cos(\pi-\theta)\\
\mathcal{R}(\varphi(p,-\varepsilon)) &\leq \mathcal{R}(\varphi(p,0)) - \varepsilon\cos(\pi-\theta)\\
&= r - \varepsilon\cos(\pi-\theta)
\end{aligned}
$$



- Donc, il existe un voisinage ouvert W de p dans H tel que pour tout $q \in W$, la trajectoire $\varphi(q,t)$ coupe $\mathcal{R}^{-1}(r)$ en un unique point $f(q)$.
- f est continue et réalise un homéo d'un voisinage de p dans H sur un voisinage de p dans $\mathcal{R}^{-1}(r)$.

Lemme d'isotopie



Théorème. Soient $r_1 < r_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $[r_1, r_2]$ ne contienne pas de valeur critique de $\mathcal{R}$. Alors, tous les niveaux $\mathcal{R}^{-1}(r)$, $r \in [r_1, r_2]$, sont homéomorphes et l'anneau

$$A(r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 \leq \mathcal{R}(x) \leq r_2\}$$

est homéomorphe à $\mathcal{R}^{-1}(r_1) \times [r_1, r_2]$.

Preuve du lemme d'isotopie

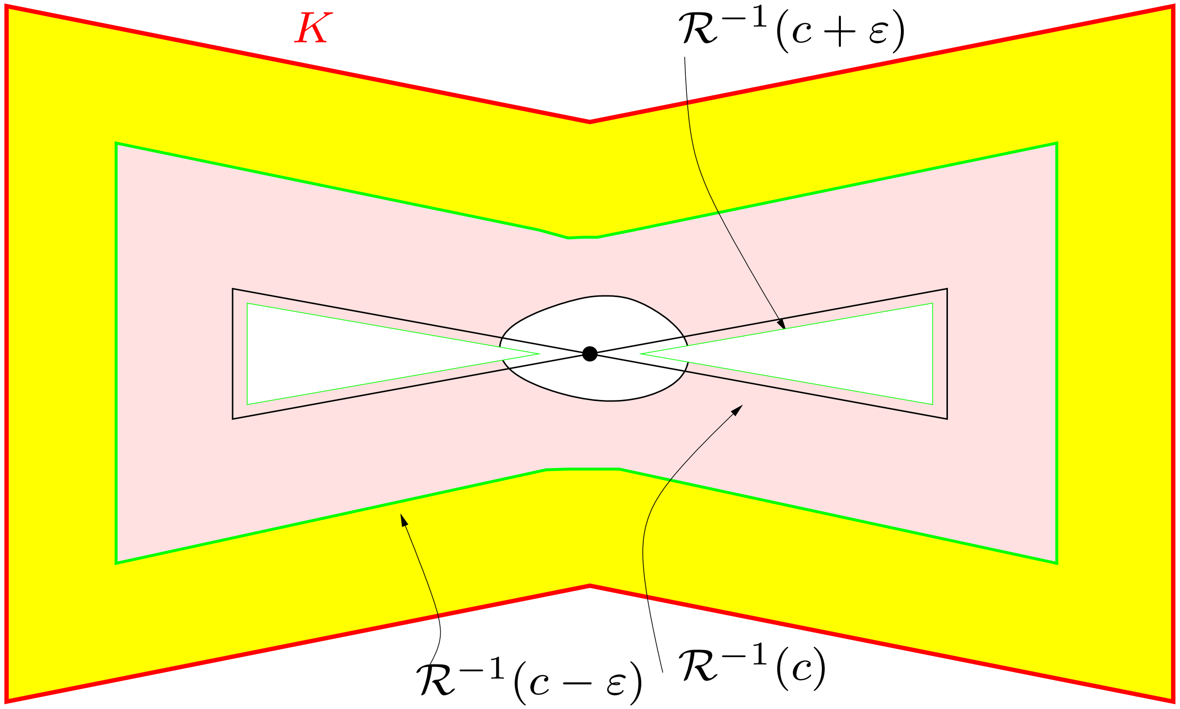
- L'anneau $A(r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 \leq \mathcal{R}(x) \leq r_2\}$ est compact.
- Il existe $\theta > \frac{\pi}{2}$ tel que

$$\forall x \in A(r_1, r_2),\ \forall y \in \Gamma(x),\quad (\widehat{xy, X(x)}) \geq \theta.$$

- Comme pour le théorème des fonctions implicites, le champ X est utilisé pour construire l'homéomorphisme recherché...

Remarque : Dans le lemme d'isotopie, on peut prendre $r_2 = +\infty$.

Lemme de déformation



Lemme. Soit $c \in \mathbb{R}^+$ une valeur critique isolée de $\mathcal{R}$. Pour tout voisinage ouvert V de Crit$(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}^{-1}(c)$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{R}^{-1}([0, c+\varepsilon]) \setminus V$ soit isotope à $\mathcal{R}^{-1}([0, c-\varepsilon])$.

Théorème de Sard

Théorème (Fu). Si $K \subset \mathbb{R}^3$, l'ensemble des valeurs critiques de $\mathcal{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Attention : Le résultat est faux en dimension supérieure à 3 (Ferry).

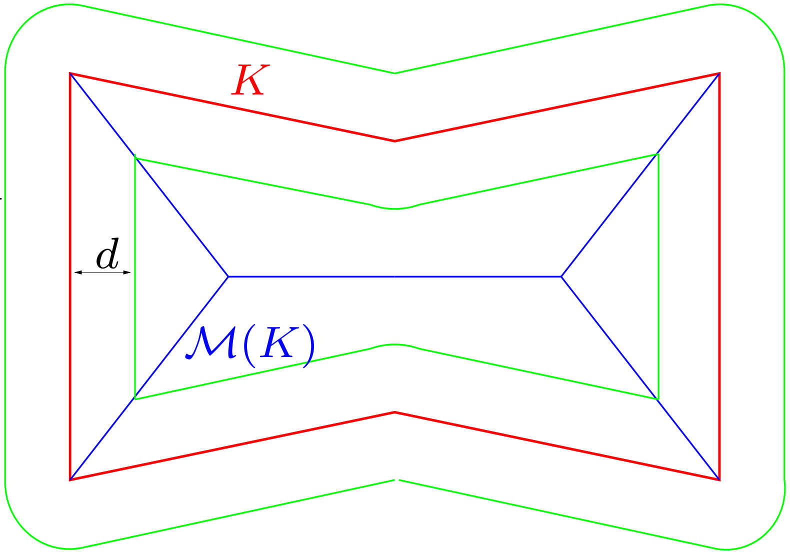
Cependant, en toute dimension

Théorème (Fu - C-Lieutier). Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est sous-analytique ("analytique par morceaux"), l'ensemble des valeurs critiques de $\mathcal{R}$ est fini.

Voisinages tubulaires

On note

$$\mathrm{wfs}(K) = \inf\{c \in \mathbb{R}_+^* : c \in \mathsf{Crit}(\mathcal{R})\}$$



et pour tout $d > 0$,

$$K^d = \mathcal{R}^{-1}([0, d[).$$

Corollaire. Soient $0 < d_1 < d_2 < \mathrm{wfs}(K)$. Les voisinages tubulaires K^{d_1} et K^{d_2} sont homéomorphes.

Théorème (Fu). Si $d \notin \mathsf{Crit}(\mathcal{R})$, alors

$$\mathrm{lfs}(K^d) = \inf\{d(x, \mathbb{R}^n \setminus K^d) : x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n \setminus K^d)\} > 0.$$

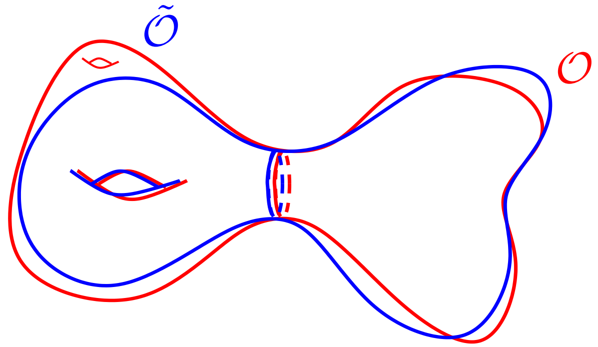
Quelques remarques

- Les définitions et les résultats précédents (à l'exception du théorème de Sard) se généralisent aisément au cas de fonctions distances à des fermés dans des variétés riemanniennes complètes.
- Ils se généralisent également à d'autres types de fonctions (gradients de Clarke généralisé,...).
- Il existe bien d'autres propriétés intéressantes des fonctions distances... (voir bibliographie).

Applications aux problèmes de stabilité et d'approximation topologique

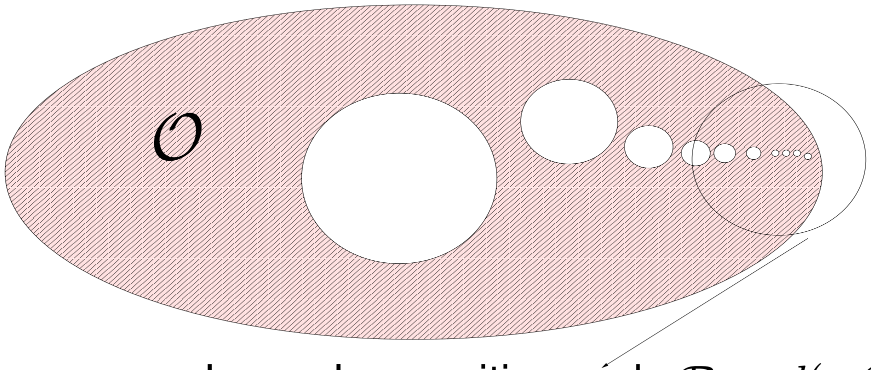
Motivation

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné.



- Question 1 : Soit $\tilde{\mathcal{O}}$ un ouvert "approximant" $\mathcal{O}$. Connaissant $\tilde{\mathcal{O}}$, peut-on déterminer la topologie de $\mathcal{O}$?
- Question 2 : Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fermé "approximant" le bord $\partial\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}$. Connaissant $\mathcal{E}$, peut-on déterminer la topologie de $\mathcal{O}$? Du bord de $\mathcal{O}$?

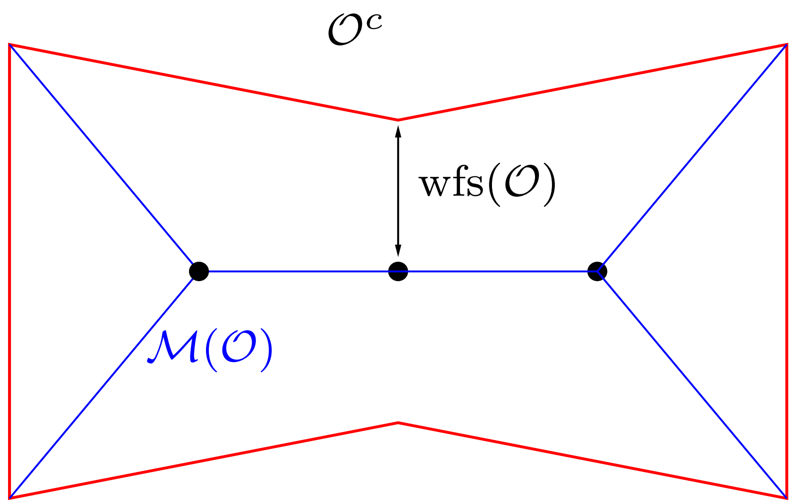
Le cadre général



Les valeurs critiques de $\mathcal{R} = d(., \mathcal{O}^c)$ tendent vers 0

- Pas de réponse positive aux questions précédentes dans le cas d'ouverts généraux.
- $\Rightarrow$ Nécessité de se restreindre...
- Trouver une classe d'ouverts assez générale couvrant la majorité des cas rencontrés dans les applications.

Le Weak Feature Size



Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{R} = d(., \mathcal{O}^c)$.

Définition 1 *Le Weak Feature Size de $\mathcal{O}$, noté $\mathrm{wfs}(\mathcal{O})$, est la distance entre le complémentaire $\mathcal{O}^c$ de $\mathcal{O}$ et l'ensemble des points critiques de $\mathcal{R}$ définie par*

$$\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) = \inf_{x \in \mathrm{Crit}(\mathcal{R})} d(x, \mathcal{O}^c).$$

Les ouverts à wfs (strictement) positif

Dans la suite, on considère la classe des ouverts bornés $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) > 0$ [a].

Avantages :

- Résultats de stabilité topologique (voir plus loin).
- Si le bord de $\mathcal{O}$ est affine par morceaux (polyèdre), alors $\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) > 0$.
- Si le bord de $\mathcal{O}$ est analytique par morceaux (sous-analytique), alors $\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) > 0$ (Fu et C-Lieutier : l'ensemble des valeurs critiques de $\mathcal{R}$ est fini).

[a] On pourrait aussi considérer, sans perte de généralité dans la suite, la classe des ouverts complémentaires de compacts

Notion d'approximation

Distance de Hausdorff : Soient A et B deux sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$. La distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$d_H(A,B) = \max\left(\sup_{x\in A} d(x,B),\ \sup_{y\in B} d(y,A)\right)$$

La distance de Hausdorff définit une distance sur l'ensemble $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ des compacts de $\mathbb{R}^n$ qui devient un espace métrique complet.

Equivalence d'homotopie

Soient X et Y deux espaces topologiques.

- Deux applications $f_0 : X \to Y$ et $f_1 : X \to Y$ sont homotopes si il existe une application continue H, $H : [0,1] \times X \to Y$, telle que $\forall x \in X, H(0,x) = f_0(x)$ et $H(1,x) = f_1(x)$.
- X et Y ont le même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes à l'identité.
- Si X et Y ont même type d'homotopie, ils ont des groupes fondamentaux et des groupes d'homologie isomorphes.

Une caractérisation

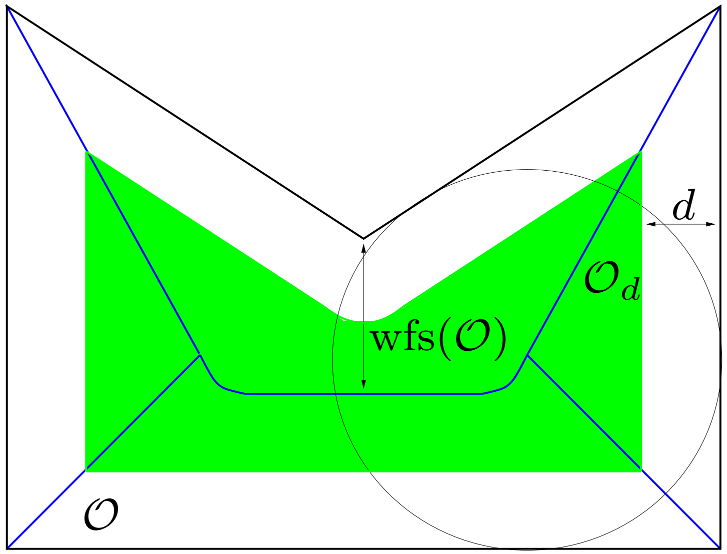
Proposition 1 *Si $Y \subset X$ et s'il existe une application continue H, $H : [0,1] \times X \to X$ telle que :*

- $\forall x \in X, H(0,x) = x$
- $\forall x \in X, H(1,x) \in Y$
- $\forall y \in Y, \forall t \in [0,1], H(t,y) \in Y$

alors, X et Y ont le même type d'homotopie.

Si la troisième hypothèse est remplacée par $\forall y \in Y, \forall t \in [0,1], H(t,y) = y$, on dit que H définit une rétraction par déformation de X sur Y.

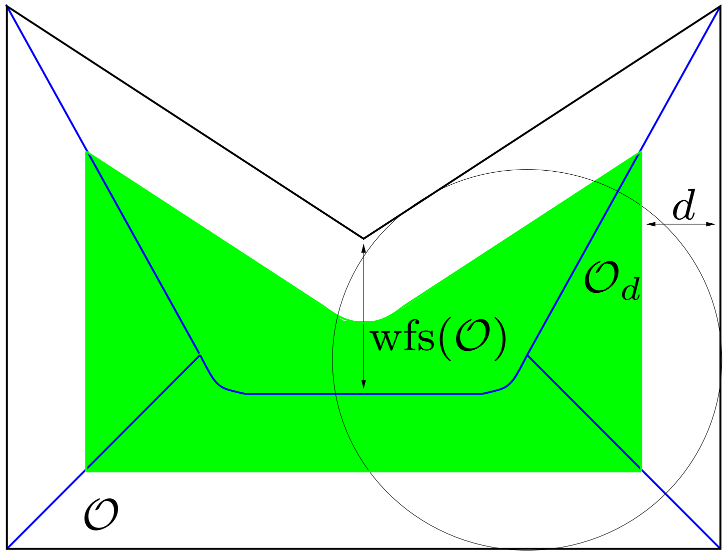
wfs **et topologie des offsets**



Notation : $\mathcal{O}_d = \{x \in \mathcal{O}, \mathcal{R}(x) > d\}$

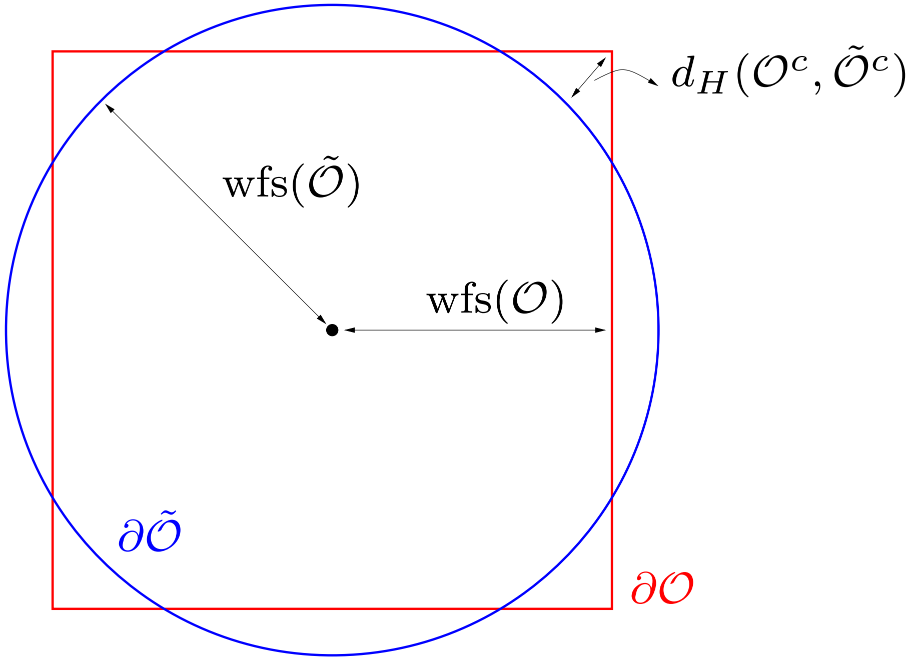
Théorème 1 *Si $d < \mathrm{wfs}(\mathcal{O})$, $\overline{\mathcal{O}_d}$ est un rétract par déformation de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_d$ est homéomorphe à $\mathcal{O}$.*

Preuve du théorème



- Lemme d'isotopie $\Rightarrow \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_d$ est homéomorphe à $\mathcal{R}^{-1}(d) \times]0, d]$.
- Donc $\Rightarrow \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_d$ se rétracte par déformation sur $\mathcal{R}^{-1}(d)$.
- Même argument $\Rightarrow \mathcal{O}$ est homéomorphe à $\mathcal{O}_d$.

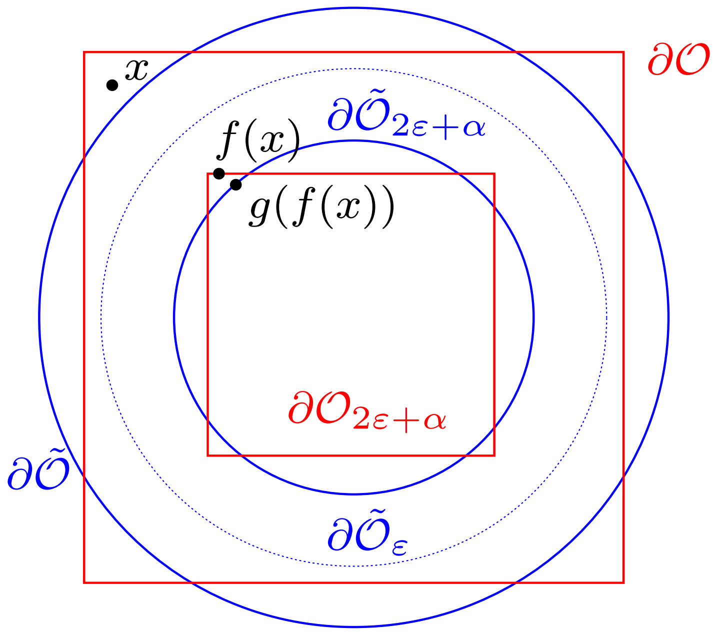
wfs **et approximation**



Théorème 2 *Soient $\mathcal{O}$ et $\tilde{\mathcal{O}}$ deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) > 2\varepsilon$ $\mathrm{wfs}(\tilde{\mathcal{O}}) > 2\varepsilon$. Si $d_H(\mathcal{O}^c, \tilde{\mathcal{O}}^c) < \varepsilon$ alors $\mathcal{O}$ and $\tilde{\mathcal{O}}$ ont le même type d'homotopie.*

Preuve

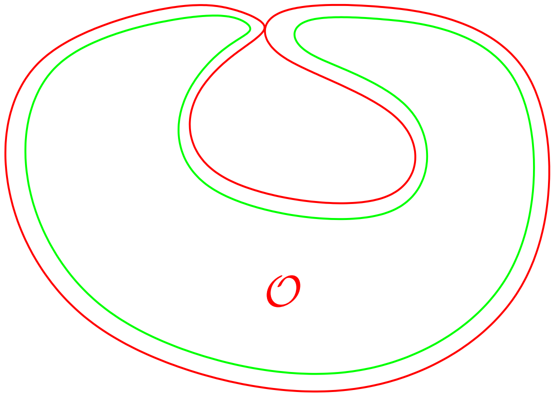
Soit $\alpha > 0$ tel que $2\varepsilon + \alpha < \mathrm{wfs}(\mathcal{O})$. Il existe des rétractions par déformation
$f : \mathcal{O} \to \overline{\mathcal{O}_{2\varepsilon+\alpha}} \subset \tilde{\mathcal{O}}$ et $g : \tilde{\mathcal{O}} \to \overline{\tilde{\mathcal{O}}_{2\varepsilon+\alpha'}} \subset \mathcal{O}$.



- $g \circ f$ est homotope à l'identité dans $\mathcal{O}$:
  1. L'homotopie associée à f permet de "pousser" $x \in \mathcal{O}$ sur $f(x) \in \overline{\mathcal{O}_{2\varepsilon+\alpha}}$.
  2. On a $\overline{\mathcal{O}_{2\varepsilon+\alpha}} \subset \tilde{\mathcal{O}}_{\varepsilon}$. L'homotopie associée à g permet donc de pousser $f(x)$ sur $g(f(x))$.
  3. Comme $\tilde{\mathcal{O}}_{\varepsilon} \subset \mathcal{O}$ et comme la distance à $\tilde{\mathcal{O}}^c$ croît le long de la "trajectoire" de $f(x)$ à $g(f(x))$, les images de x au cours de l'homotopie restent dans $\mathcal{O}$.
- De même $f \circ g$ est homotope à l'identité dans $\tilde{\mathcal{O}}$.

Structure des ouverts à $\mathrm{wfs} > 0$

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) > 0$.



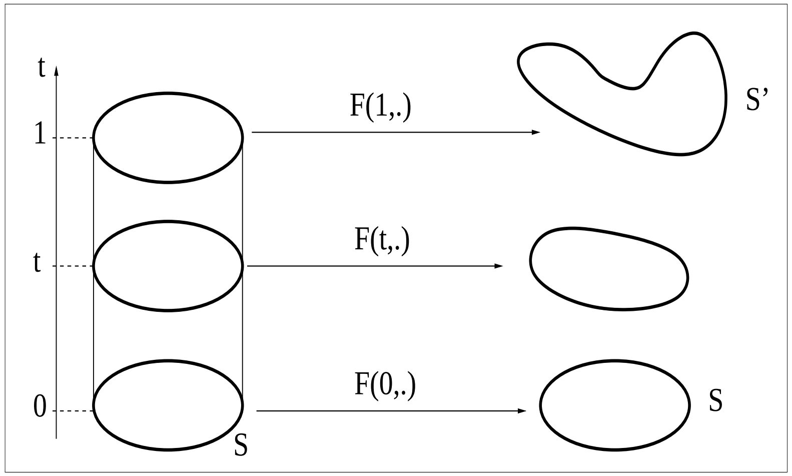
- Thm des fonctions implicites : pour $0 < d < \mathrm{wfs}(\mathcal{O})$, $\mathcal{R}^{-1}(d)$ est une hypersurface C^0 plongée dans $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{O}$ homéomorphe à $\mathcal{O}_d \Rightarrow \mathcal{O}$ homéomorphe à un ouvert bordé par une hypersurface $S_{\mathcal{O}}$.
- Application “canonique” : $\mathcal{O} \to S_{\mathcal{O}}$.

Isotopie en dimension 3

Soient $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces.

Thm :

"Isotopie $\Rightarrow$ Isotopie ambiante"



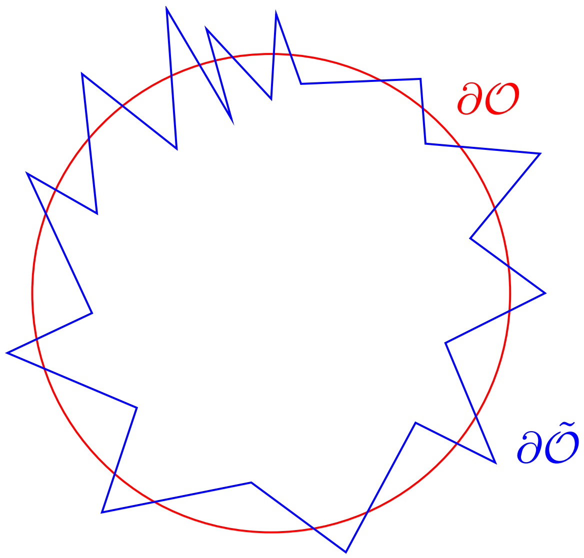
- **Isotopie entre S et S' :** $F : S \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ continue tq $F(.,0) = Id_S$, $F(S,1) = S'$ et pour tout $t \in [0,1]$, $F(.,t)$ est un homéomorphisme sur son image.
- **Isotopie ambiante :** $F : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ continue telle que $F(.,0) = Id_{\mathbb{R}^3}$, $F(S,1) = S'$, et pour tout t, $F(.,t)$ est un homéomorphisme.

Isotopie et wfs **en dimension 3**

Théorème 3 *Soient $\mathcal{O}$ et $\tilde{\mathcal{O}}$ deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^3$. Si*

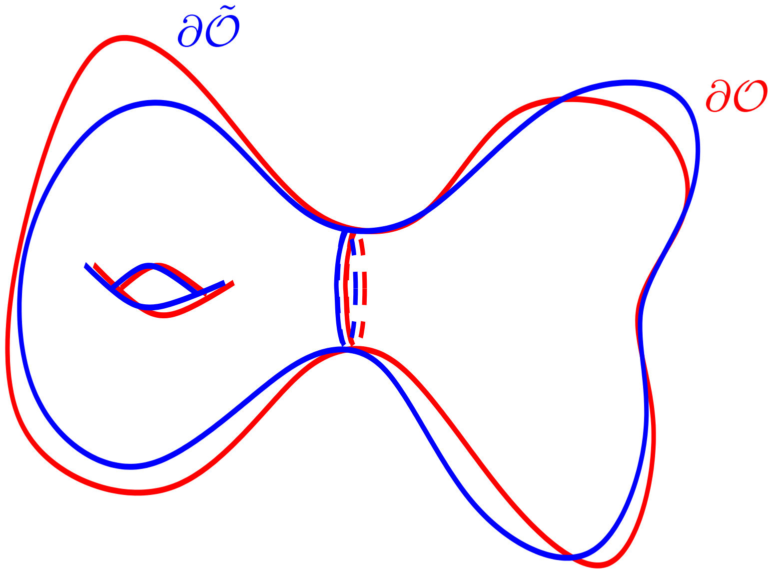
$$d_H(\mathcal{O}^c, \tilde{\mathcal{O}}^c) < \frac{\min(\mathrm{wfs}(\mathcal{O}), \mathrm{wfs}(\tilde{\mathcal{O}}))}{2}$$

alors $S_{\mathcal{O}}$ et $S_{\tilde{\mathcal{O}}}$ sont isotopes.



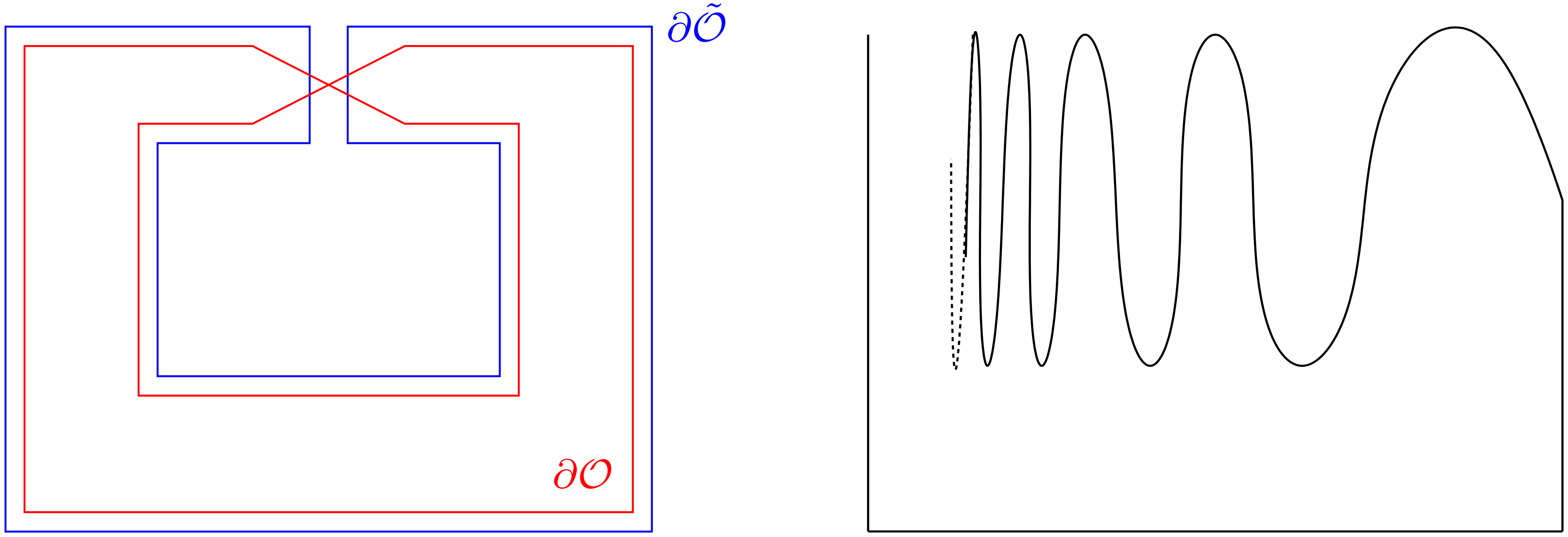
Preuve : Résulte de ce qui précède et d'un critère d'isotopie de surfaces dans $\mathbb{R}^3$ (C-Cohen-Steiner) : une “copie” de $S_{\tilde{\mathcal{O}}}$ est contenue dans $\mathcal{R}^{-1}(]0, \mathrm{wfs}(\mathcal{O})[) \simeq S_{\mathcal{O}} \times]0, \mathrm{wfs}(\mathcal{O})[$ et réciproquement ...

wfs et approximation en dimension 3



Corollaire 1 *Soient $\mathcal{O}$ et $\tilde{\mathcal{O}}$ deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^3$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) > 2\varepsilon$ $\mathrm{wfs}(\tilde{\mathcal{O}}) > 2\varepsilon$. Si $d_H(\mathcal{O}^c, \tilde{\mathcal{O}}^c) < \varepsilon$ alors $\mathcal{O}$ and $\tilde{\mathcal{O}}$ sont homéomorphes.*

Preuve du corollaire



- Pour tout $0 < d < 2\varepsilon$, $\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}_d$ et $\tilde{\mathcal{O}} \simeq \tilde{\mathcal{O}}_d$.
- Théorème 3 $\Rightarrow S_d = \partial\mathcal{O}_d$ et $\tilde{S}_d = \partial\tilde{\mathcal{O}}_d$ sont isotopes.
- Il existe une isotopie ambiante entre S_d et $\tilde{S}_d$ qui réalise un homéomorphisme entre $\mathcal{O}_d$ et $\tilde{\mathcal{O}}_d$

Propriétés de finitude

Théorème 4 *Soit $n \geq 1$ un entier et soit $\varepsilon > 0$ et $D > 0$ deux réels positifs. Il existe un nombre fini $C(n, \varepsilon, D)$ de types d'homotopie parmi les ouverts $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ satisfaisant $\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) > \varepsilon$ et diamètre$(\mathcal{O}) < D$.*

Corollaire 2 *Si $n = 3$, il existe un nombre fini $C(n, \varepsilon, D)$ de types d'homéomorphie parmi les ouverts $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ satisfaisant $\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) > \varepsilon$ et diamètre$(\mathcal{O}) < D$.*

“Coder” le type d’homotopie

Notations :

- $E = \{\mathcal{O} \subset [-D, D]^n : \mathcal{O}$ ouvert, $\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) > \varepsilon,$ Diam$(\mathcal{O}) < D\}$
- Soit $h = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}} > 0$ et G_h la grille régulière

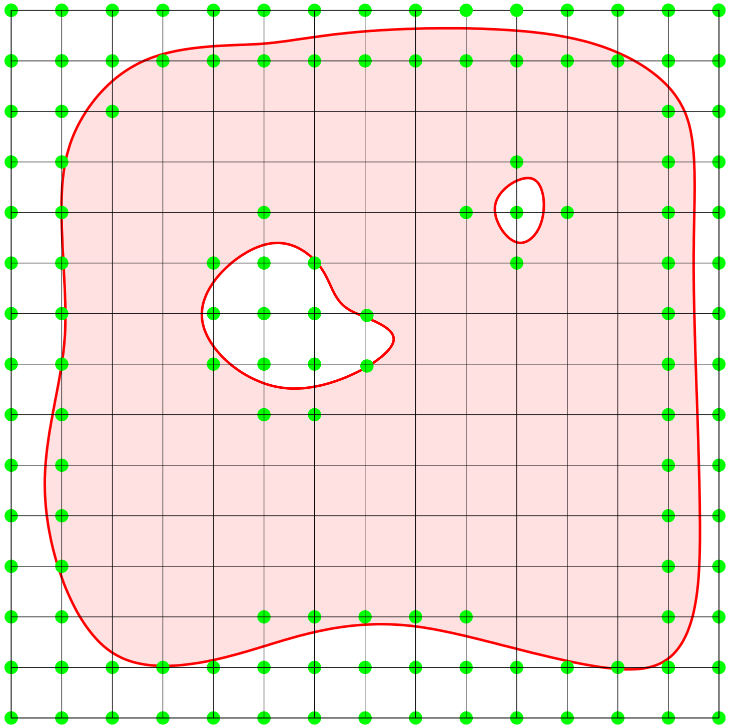
$$G_h = \{(k_1 h, k_2 h, \cdots k_n h) \ : k_i \text{ entiers tq } \frac{-D}{h} \leq k_i \leq \frac{D}{h}\}$$

- On considère l’application $\mathcal{C} : E \rightarrow 2^{G_h}$

$$\mathcal{O} \in E \longrightarrow G_{\mathcal{O}} = \{x \in G_h : d(x, \mathcal{O}^c) < \frac{\varepsilon}{4}\}$$

“Coder” le type d’homotopie

$$\mathcal{C}(\mathcal{O}) = \{x \in G_h : d(x, \mathcal{O}^c) < \tfrac{\varepsilon}{4}\}$$



- Si $\mathcal{C}(\mathcal{O}) = \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{O}})$ alors $d_H(\mathcal{O}^c, \tilde{\mathcal{O}}^c) < \varepsilon/2$.
- Donc $\mathcal{C}(\mathcal{O}) = \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{O}}) \Rightarrow \mathcal{O}$ et $\tilde{\mathcal{O}}$ ont le même type d’homotopie.

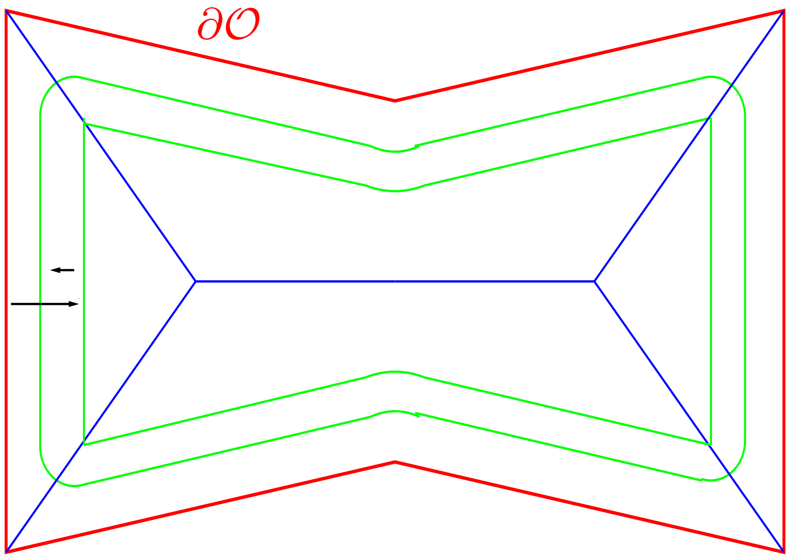
“Coder” le type d’homotopie

Quelques remarques et questions:

- $C(n, \varepsilon, D) \leq 2^{(4D\sqrt{n}/\varepsilon)^n}$ mais $\mathcal{C}$ n’est pas injective... Borne optimale?
- L’ensemble des types d’homotopie des ouverts bornés à $\mathrm{wfs} > 0$ est dénombrable (corollaire immédiat). Est-ce le cas pour les ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$?

Régularisation d'offsets

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $\mathrm{wfs}(\mathcal{O}) > 0$. Pour $0 < \varepsilon < d < \mathrm{wfs}(\mathcal{O})$, on note



$$\mathcal{O}_d^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathcal{O}_d) \leq \varepsilon\}.$$

Théorème 5 *Pour tout $0 < d < \mathrm{wfs}(\mathcal{O})$, il existe $\varepsilon(d) > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon(d)$ le bord de $\mathcal{O}_d^\varepsilon$ soit une hypersurface lisse de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ de $\mathbb{R}^n$. De plus, si $n = 3$, cette surface est isotope à $S_\mathcal{O}$.*

Régularisation d'offsets

Preuve du théorème.

- Théorème de Fu sur les voisinages tubulaires $\Rightarrow$ $\mathrm{lfs}(\overline{\mathcal{O}}_d) > 0$.
- Thm (Federer) : si K est un compact tel que $\mathrm{lfs}(K) > 0$, il existe $\varepsilon(K) > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon(K)$, K^ε est à bord lisse de classe $\mathcal{C}^{1,1}$.
- Si $n = 3$: pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon(K)$, les bords de $\mathcal{O}_d^\varepsilon$ sont isotopes et leur union "a une structure de produit" (lemme d'isotopie pour fn distance à $\overline{\mathcal{O}}_d$) + thm d'isotopie vu précédemment.

Conclusion

Les fonctions distances fournissent des outils performants pour :

- l'introduction d'un "niveau de détail topologique", le wfs.
- la définition d'un cadre théorique pertinant du point de vue de l'approximation et regroupant objets lisses et non lisses.
- le développement d'algorithmes robustes de calcul de grandeurs topologiques (Cohen-Steiner, Edelsbrunner, Harer - C., Lieutier).
- un premier pas vers une théorie de l'approximation géométrique et topologique ?

Questions et problèmes

Mais de nombreuses questions restent

- Calcul du wfs en pratique?
- Existence d'un ouvert $\mathcal{O}$ à $\mathrm{wfs} > 0$ donné à proximité d'un ouvert donné $\tilde{\mathcal{O}}$? Unicité?
- Conditions d'echantillonnages liées au wfs? Définition d'un wfs local? ...

References

[1] F. Chazal, A. Lieutier, *Weak feature size and persistent homology: computing homology of solids in* $\mathbf{R}^n$ *from noisy data samples*, preprint 2004, http://math.u-bourgogne.fr/topo/chazal/publications.htm

[2] J. Cheeger, *Critical Points of Distance Functions and Applications to Geometry,* Geometric Topology: recent developments,Montecatini Terme, 1990, Springer Lecture Notes, 1504 (1991), 1-38.

[3] F.H. Clarke, *Optimization and NonSmooth Analysis,* Wiley-Interscience, New-York, 1983.

[4] J.H.G. Fu, *Tubular Neighborhoods in Euclidean Spaces,* Duke Math. Jornal, Vol. 52, No. 4 (1995).

[5] M. Gromov, *Curvature, Diameter and Betti numbers,* Comment. Math. Helv. 56 (1981).

[6] K. Grove, *Critical Point Theory for Distance Functions,* Proc. of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 54 (1993), Part 3.

[7] K. Grove, K. Shiohama, *A generalized sphere theorem*, Ann. of Math., vol 106, 1977, pp 201-211.