Persistance topologique

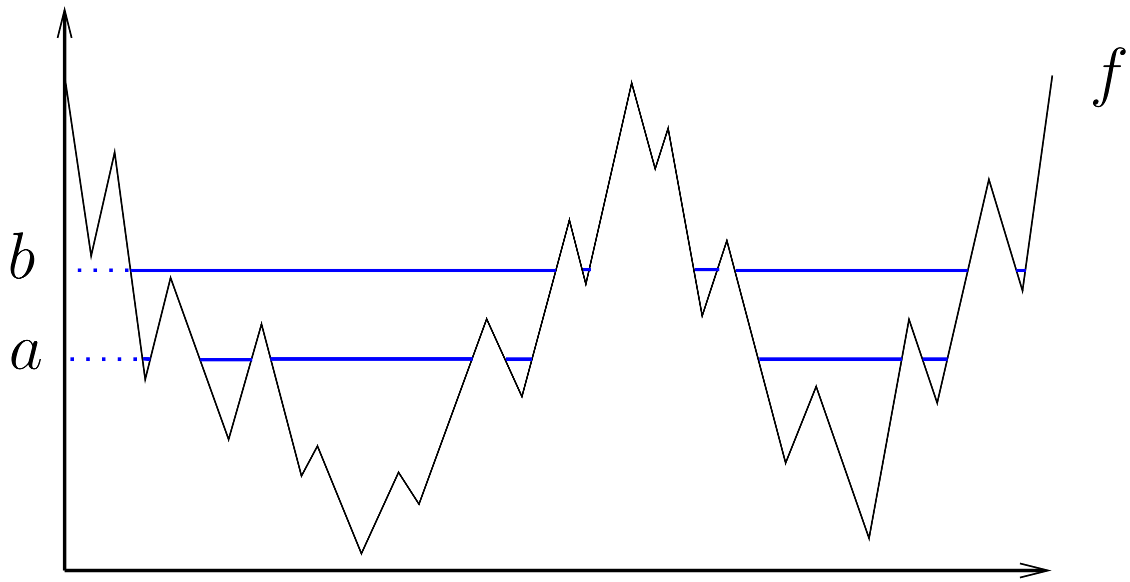
David Cohen-Steiner

INRIA
SOPHIA ANTIPOLIS

Plan

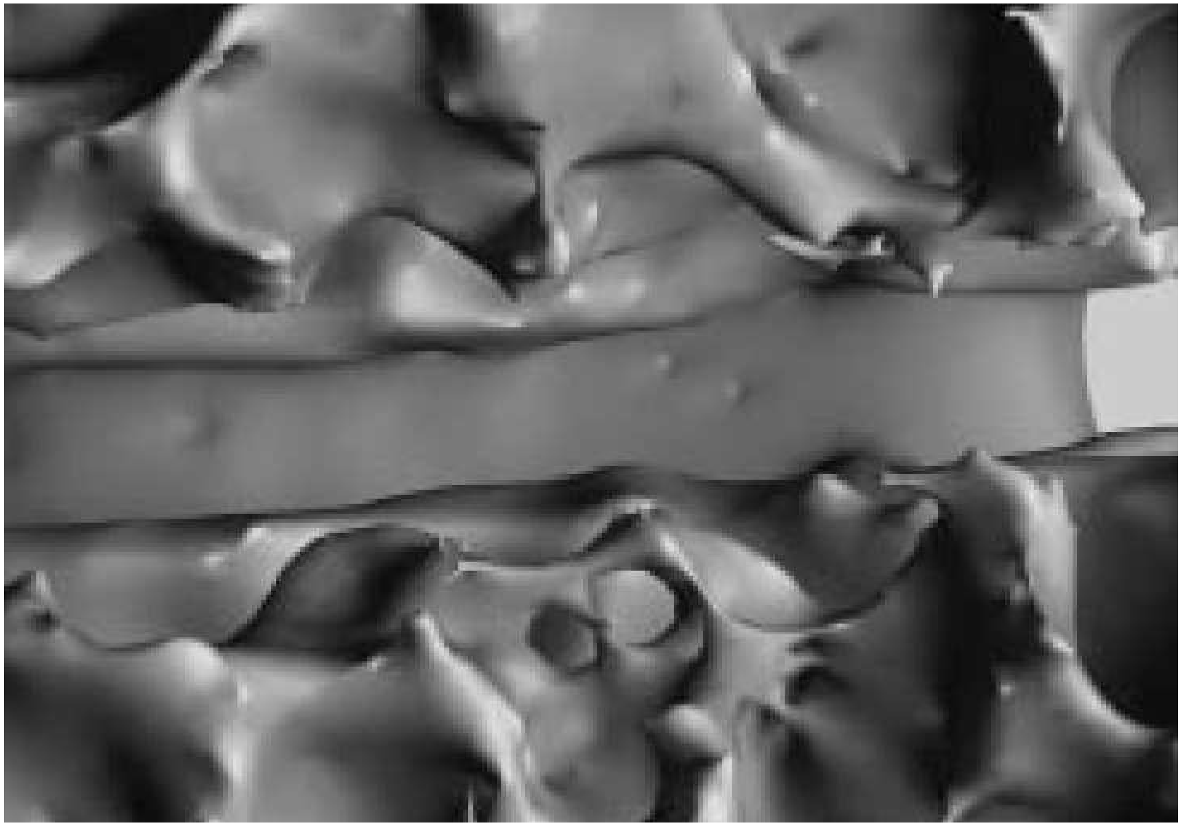
- Homologie.
- Persistance topologique : définition et calcul [ELZ02].
- Stabilité de la persistance et applications.

Exemple



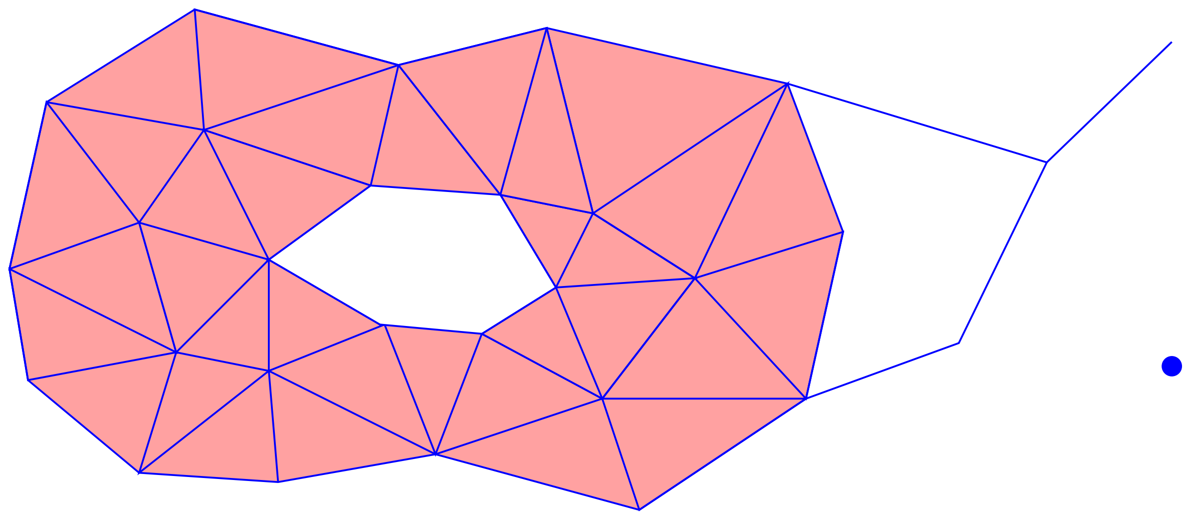
- Combien de vallées dans ce graphe?
- Comment distinguer le bruit topologique du signal?

Bruit topologique en 3D



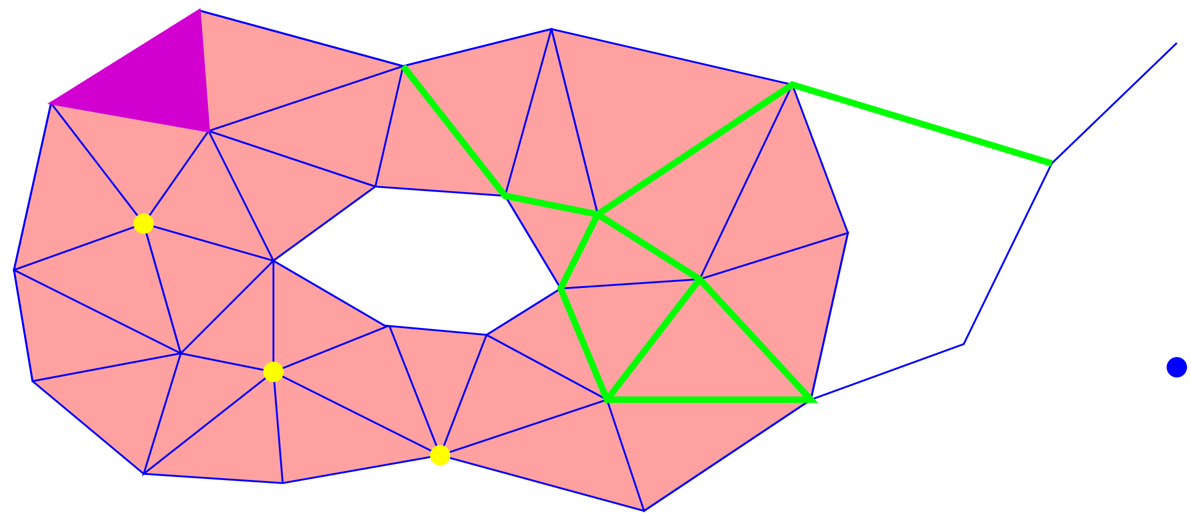
- Composantes, cavités et poignées “parasites”.

Complexe simplicial



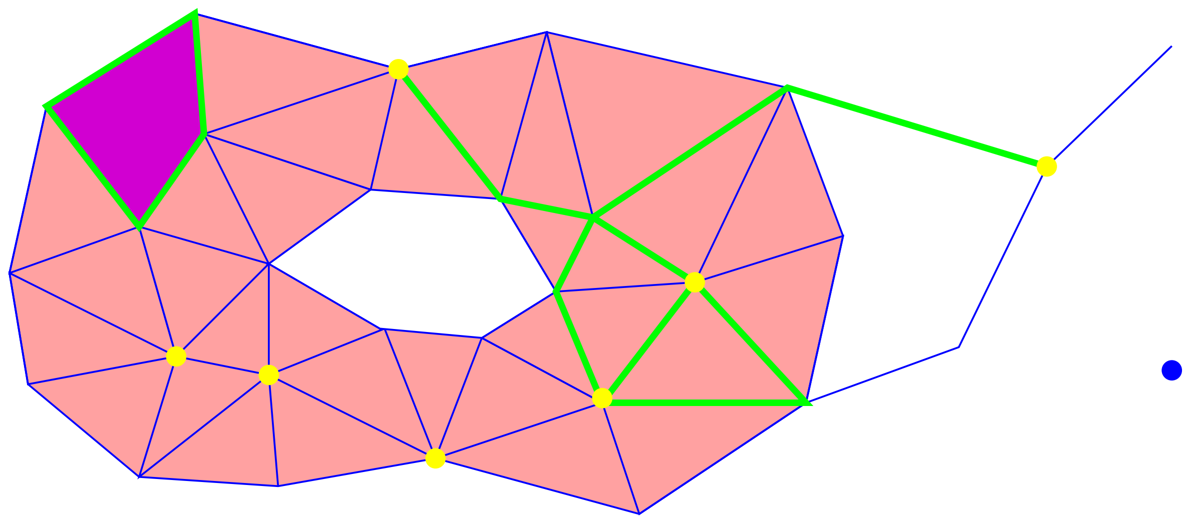
- Union de simplexes $\mathbb{X}$.
- L'intersection de deux simplexes de $\mathbb{X}$ est une face.

Chaînes simpliciales mod 2



- k-chaîne de $\mathbb{X}$ = union de k-simplexes de $\mathbb{X}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).
- L'ensemble des k-chaînes de $\mathbb{X}$ muni de la différence symétrique forme un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel $C_k(\mathbb{X})$.

Opérateur de bord



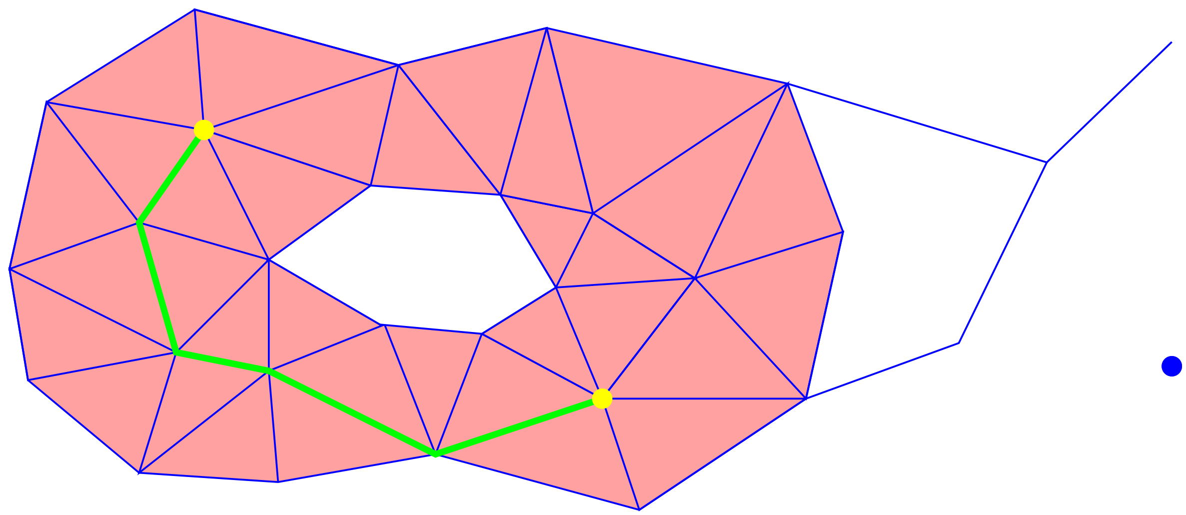
- On note $\partial_k(s)$ le bord d'un k-simplexe s de $\mathbb{X}$.
- Cela définit une application linéaire $\partial_k : C_k(\mathbb{X}) \to C_{k-1}(\mathbb{X})$.

Groupes d’homologie

$$C_{k+1}(\mathbb{X}) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(\mathbb{X}) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(\mathbb{X})$$

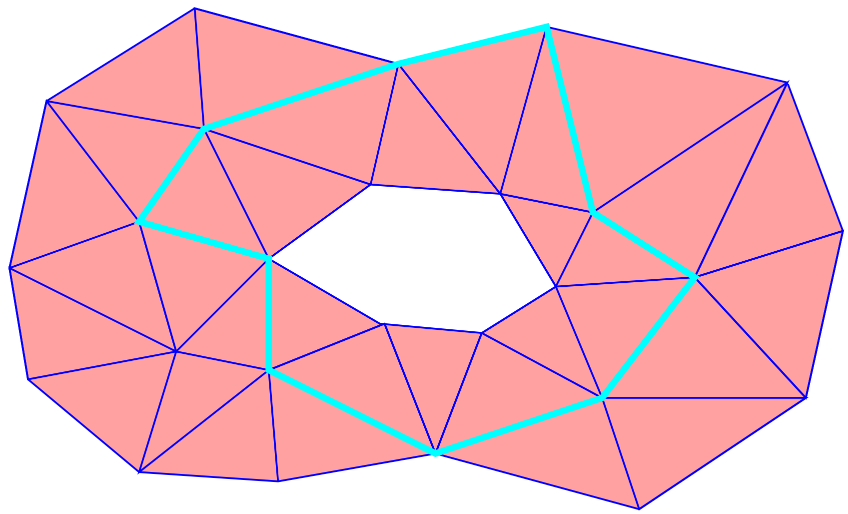
- Espace des cycles $Z_k(\mathbb{X}) = \ker(\partial_k) \subset C_k(\mathbb{X})$.
- Espace des bords $B_k(\mathbb{X}) = \mathrm{im}(\partial_{k+1}) \subset C_k(\mathbb{X})$.
- Le bord d’une chaîne est un cycle : $B_k(\mathbb{X}) \subset Z_k(\mathbb{X})$.
- On défi nit $H_k(\mathbb{X}) = Z_k(\mathbb{X})/B_k(\mathbb{X}) = \ker(\partial_k)/\mathrm{im}(\partial_{k+1})$.

$H_0(\mathbb{X})$



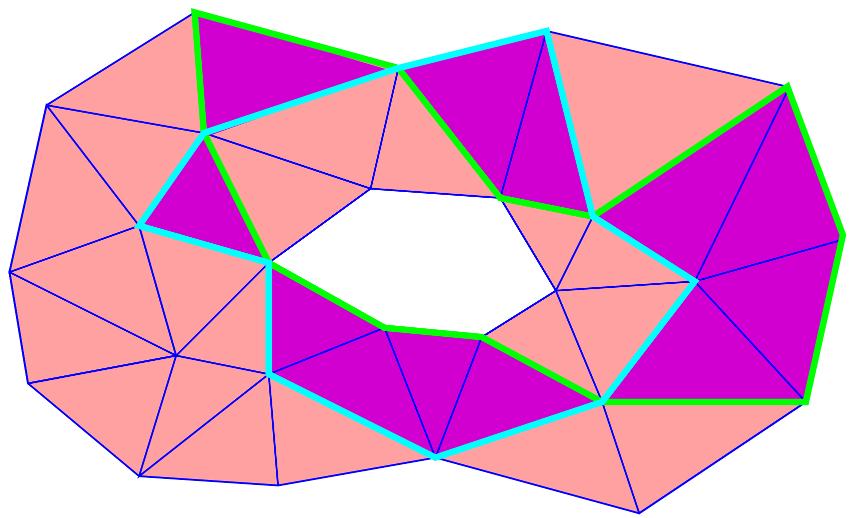
- La dimension de $H_0(\mathbb{X})$ est le nombre de composantes connexes de $\mathbb{X}$.

$H_1(\mathbb{X})$



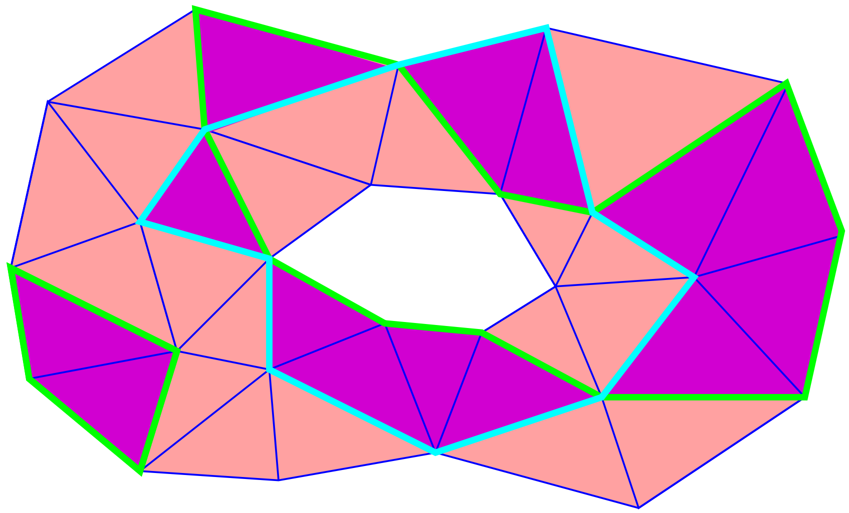
- La dimension de $H_1(\mathbb{X})$ est le “nombre de boucles indépendantes” de $\mathbb{X}$. Ici $H_1(\mathbb{X}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$H_1(\mathbb{X})$



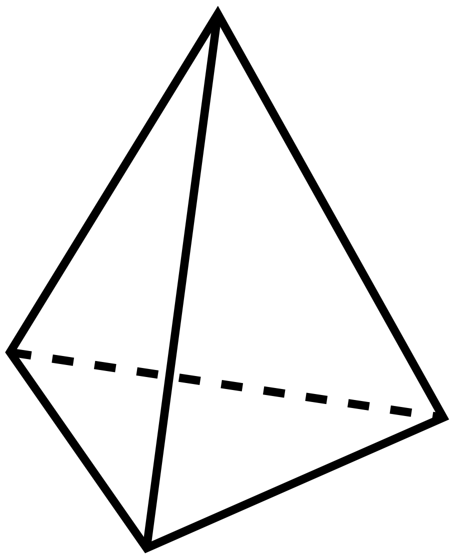
- La dimension de $H_1(\mathbb{X})$ est le “nombre de boucles indépendantes” de $\mathbb{X}$. Ici $H_1(\mathbb{X}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

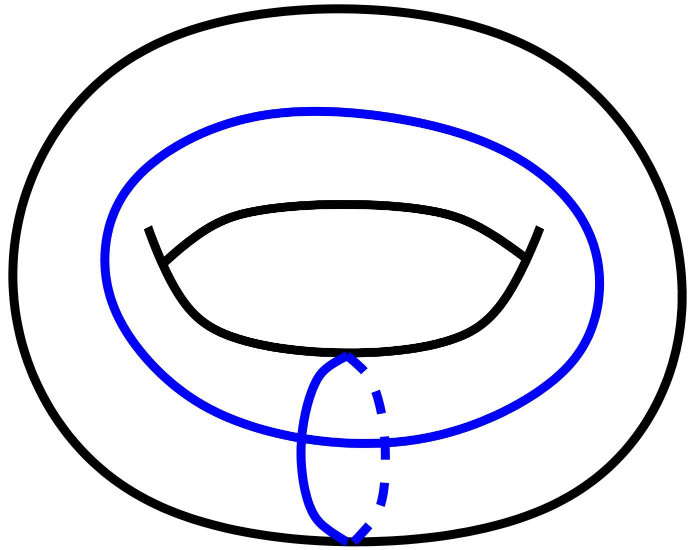
$H_1(\mathbb{X})$



- La dimension de $H_1(\mathbb{X})$ est le “nombre de boucles indépendantes” de $\mathbb{X}$. Ici $H_1(\mathbb{X}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$H_1(\mathbb{X})$





- $\dim H_1(\mathbb{X}) = 3$.
- $\dim H_1(\mathbb{X}) = 2$.genre.