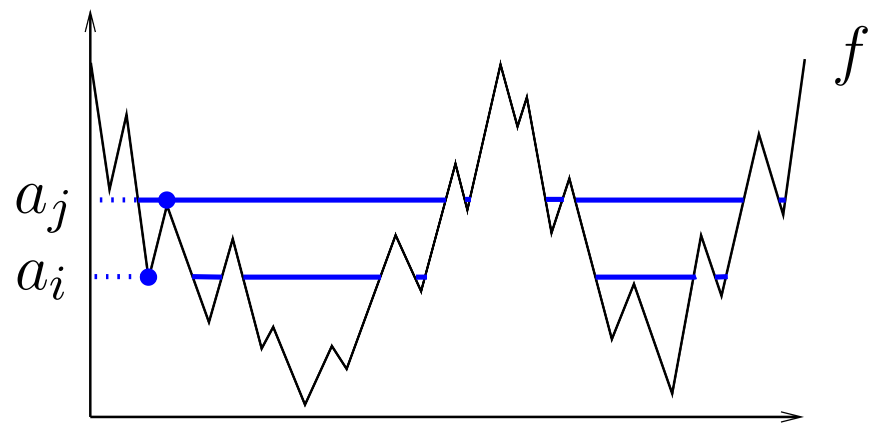
Plan

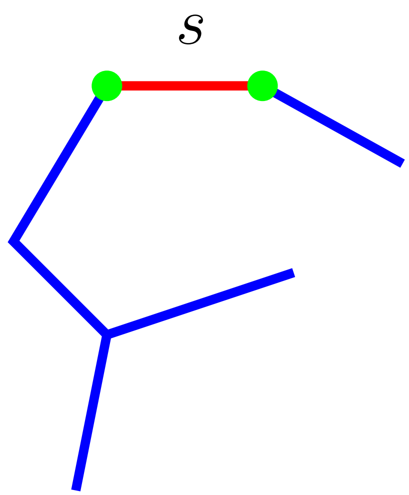
- Homologie.
- Persistance topologique : définition et calcul [ELZ02].
- Stabilité de la persistance et applications.

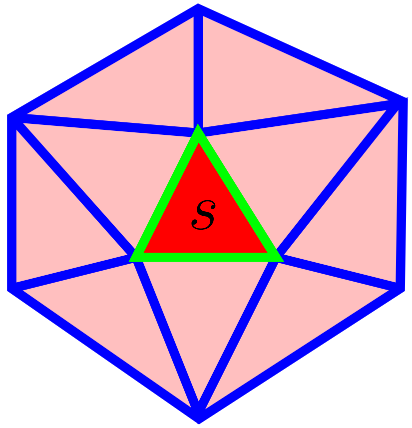
Filtration



- a_i : valeurs critiques de f ($i = 1..n$).
- $\mathbb{X}^i = f^{-1}(-\infty, a_i]$.
- Filtration de $\mathbb{X}$: $\emptyset \subset \cdots \subset \mathbb{X}^i \subset \mathbb{X}^{i+1} \subset \cdots \subset \mathbb{X}^n = \mathbb{X}$.
- Filtration simpliciale : $\mathbb{X}^i$ est un complexe simplicial et $\mathbb{X}^{i+1} = \mathbb{X}^i \cup s$.

Comment évolue $H_*(\mathbb{X}^i)$?

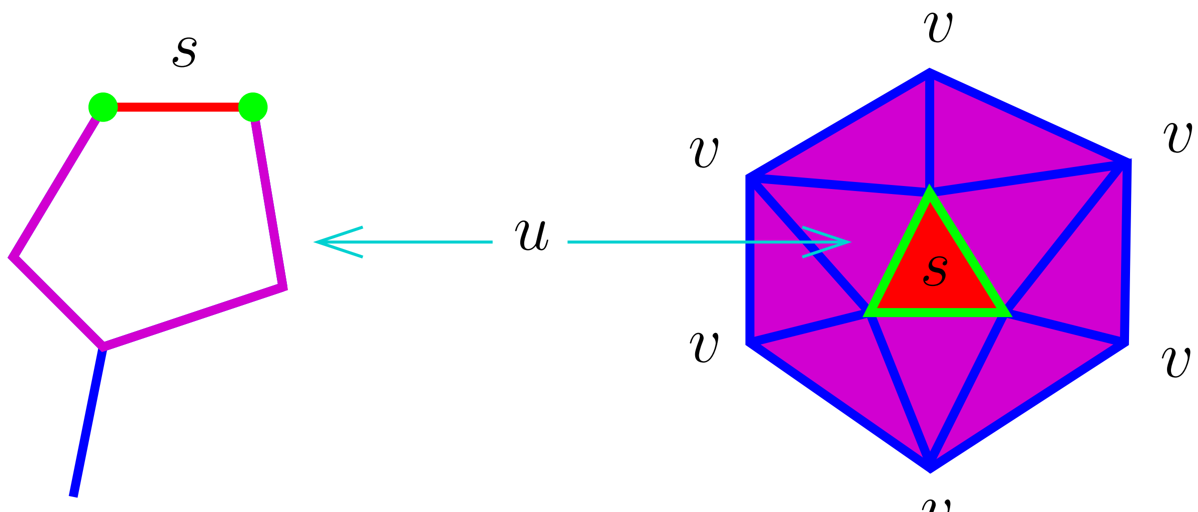




<u>Premier cas</u> : $\partial s \notin B^i_{k-1}$

- ∂s passe dans B^{i+1}_{k-1}.
- $\partial s \neq 0$ dans H^i_{k-1}, mais $\partial s = 0$ dans H^{i+1}_{k-1} : destruction.
- $f^i_{k-1} : H^i_{k-1} \longrightarrow H^{i+1}_{k-1}$ est surjective, de noyau $< \partial s >$.

Comment évolue $H_*(\mathbb{X}^i)$?



<u>Deuxième cas</u> : $\partial s \in B^i_{k-1}$

- Soit $u \in C^i_k$ tel que $\partial s = \partial u$.
- $\partial(u+s) = 0$, et $u + s \notin B^{i+1}_k$: création.
- $f^i_k : H^i_k \longrightarrow H^{i+1}_k$ est injective, $H^{i+1}_k / \mathrm{im}\, f^i_k = < u + s >$.

Système de groupes d'homologie

$$H_k^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow H_k^i \xrightarrow{f_k^i} H_k^{i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow H_k^n$$

- Donne l'évolution de la topologie des $\mathbb{X}^i$.
- On va en extraire des invariants.

Persistance

$$H_k^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow H_k^i \xrightarrow{f_k^i} H_k^{i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow H_k^n$$

- Pour $u \in H_k^i$, on défi nit :

$$\mathrm{n(u) = min\{\, j \leq i \,|\, u \in im\,(H_k^j \longrightarrow H_k^i)\}}$$

- Pour $u \in \ker f_k^i$, on apparie a_{i+1} et $a_{\mathrm{n(u)}}$.

$\longrightarrow$ *intervalles de persistance* $[a_{\mathrm{n(u)}}, a_{i+1}]$

- Chaque intervalle représente la durée de vie d'une classe d'homologie dans la fi ltration.

Alternative

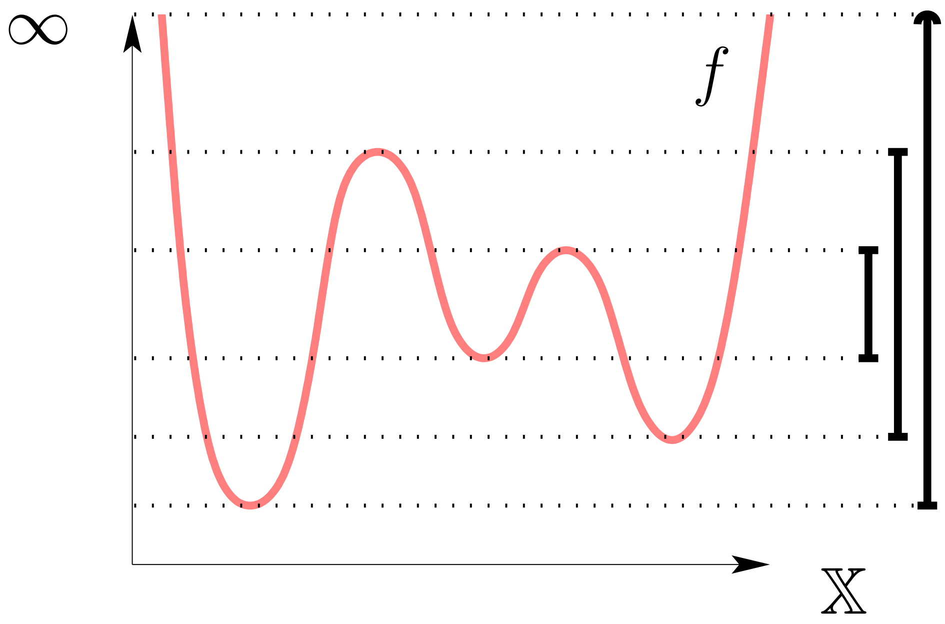
$$H_k^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow H_k^{i-1} \xrightarrow{f_k^{i-1}} H_k^i \longrightarrow \dots \longrightarrow H_k^n$$

- Pour $u \in H_k^i \setminus \mathrm{im}\, f_k^{i-1}$, on apparie a_i et $a_{\mathrm{m(u)}}$.
- Pour $u \in H_k^i$, $\mathrm{m(u)}$ est défi ni par :

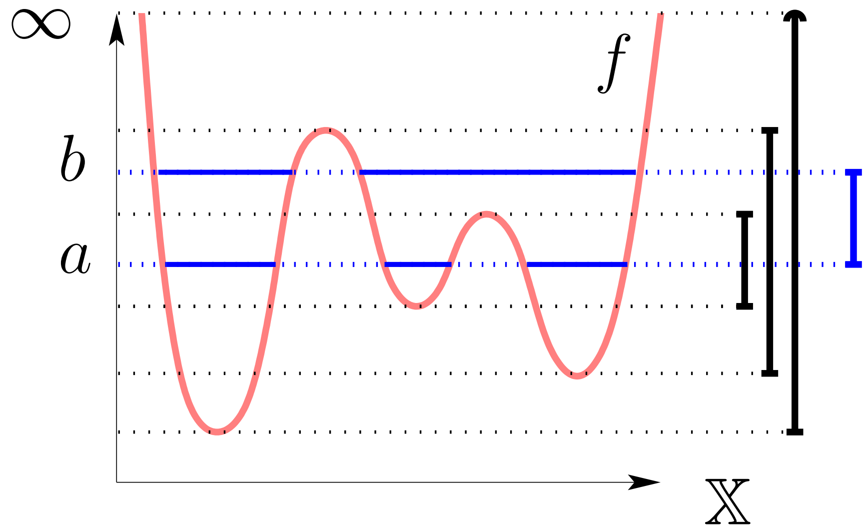
$$\mathrm{m(u)} = \min\{\, \mathrm{j} \geq \mathrm{i} \,|\, \mathrm{n}(\text{image de } \mathrm{u} \text{ dans } \mathrm{H_k^j}) < \mathrm{n(u)}\}$$

$\rightarrow$ mêmes intervalles.

Exemple



Lemme du triangle



- Le nombre d'intervalles contenant a est $\dim\left(H_k(\mathbb{X}^a)\right)$
- Groupes d'homologie persistants :

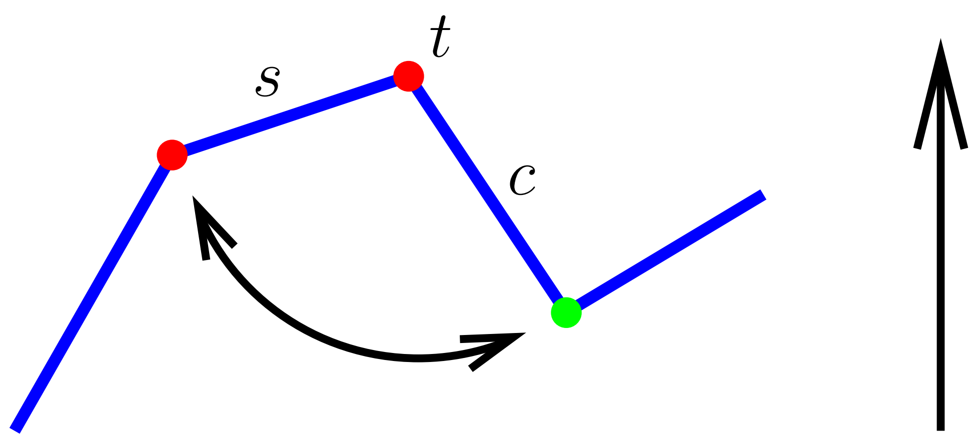
  $F_a^b = \mathrm{im}\left(H_k(\mathbb{X}^a) \longrightarrow H_k(\mathbb{X}^b)\right)$
- Le nombre d'intervalles contenant $[a, b]$ est $\dim\left(F_a^b\right)$

Algorithme incrémental

- Chaque simplexe créateur t stocke :
  - son simplexe destructeur associé, t_- (ou ∞).
  - un cycle qu'il a crée et que t_- a détruit, $\bar{t}$ (ou rien).

- $\mathbb{X}^{i+1} = \mathbb{X}^i \cup s$.
  - s est-il créateur ou destructeur?
  - si s détruit, quand $\partial s \in H^i$ est-elle née?

Remarque



- Soit $t \in \mathbb{X}^j \subset \mathbb{X}^i$ le simplexe le plus jeune de ∂s.
- $\partial s \in H^i$ est née avant $\mathbb{X}^j$ si et seulement si il existe une chaîne $c \in C^i$ dont le bord a t comme plus jeune simplexe.

Insertion de s

On pose $\bar{s} = \partial s$.

while ($\bar{s} \neq 0$) **do**

$t \leftarrow$ plus jeune simplexe de $\bar{s}$.

if ($t_- \neq \infty$) **then**

$\bar{s} \leftarrow \bar{s} + \bar{t}$

else

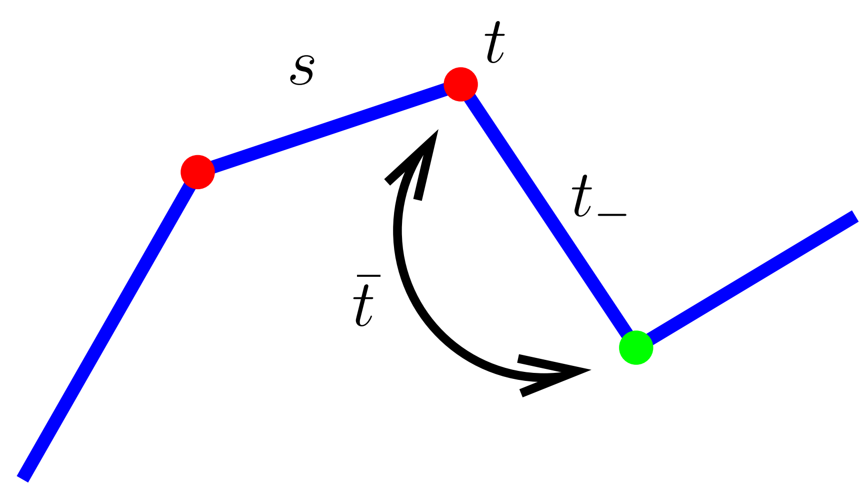
$t_- \leftarrow s$; $\bar{t} \leftarrow \bar{s}$

exit

end if

end while

$s_- \leftarrow \infty$



Cas d'une fonction PL

- Persistance de $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, linéaire par morceaux?
- On ordonne les simplexes s en fonction de $\max_s f$.
- On applique l'algorithme précédent.
- On rend en sortie les intervalles $[\max_{s\_} f, \max_s f]$ non réduits à un point.