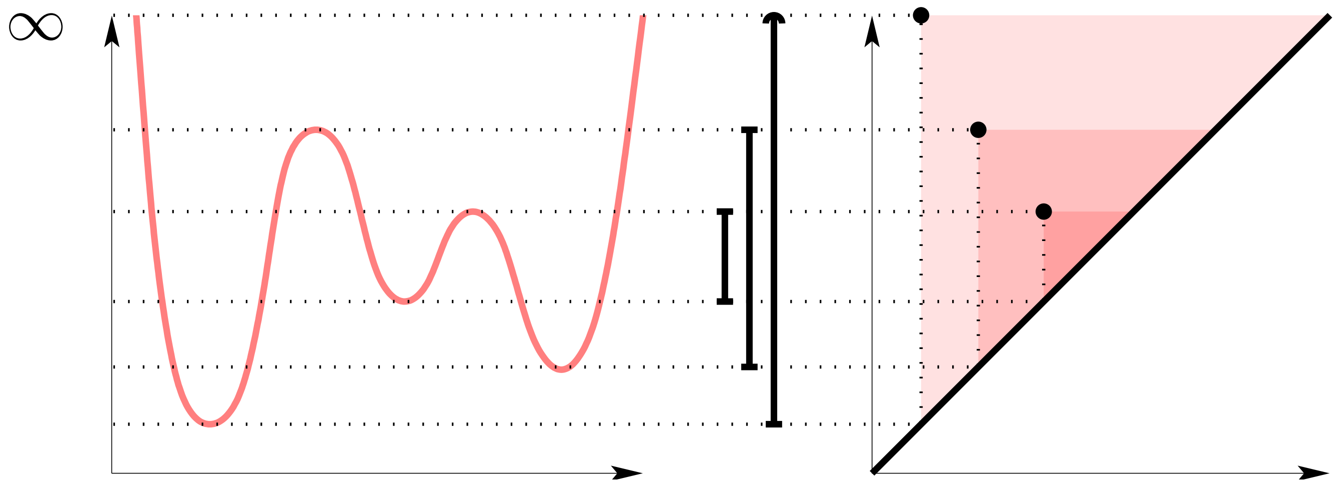
Plan

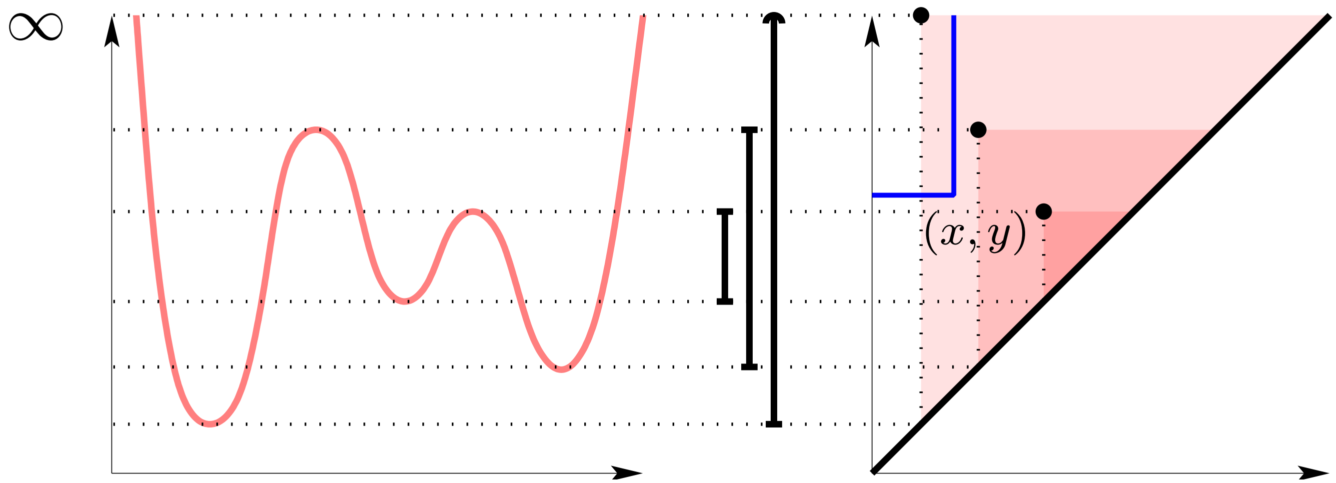
- Homologie.
- Persistance topologique : définition et calcul [ELZ02].
- Stabilité de la persistance et applications.

Diagrammes de persistance



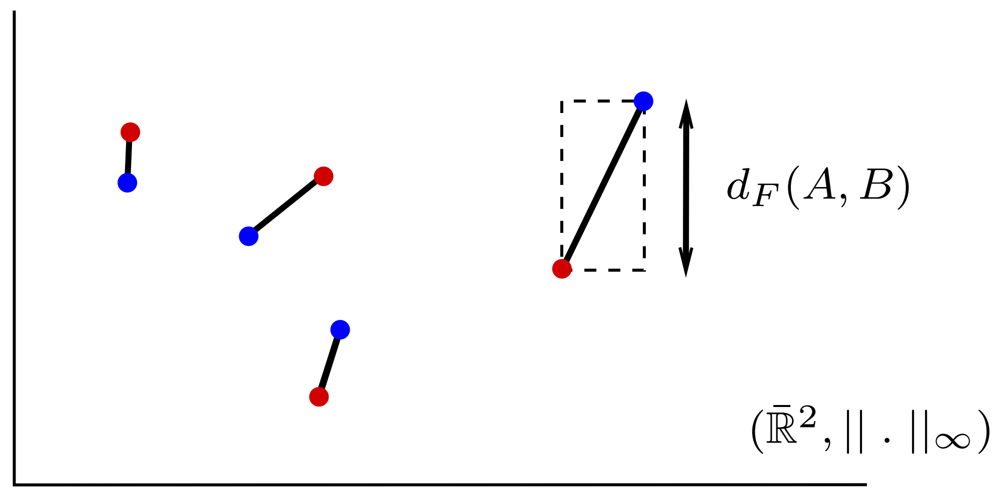
- Les intervalles deviennent des points du plan.
- On inclut la diagonale.

Diagrammes de persistance



- Les intervalles deviennent des points du plan.
- On inclut la diagonale.

Distance sur les diagrammes

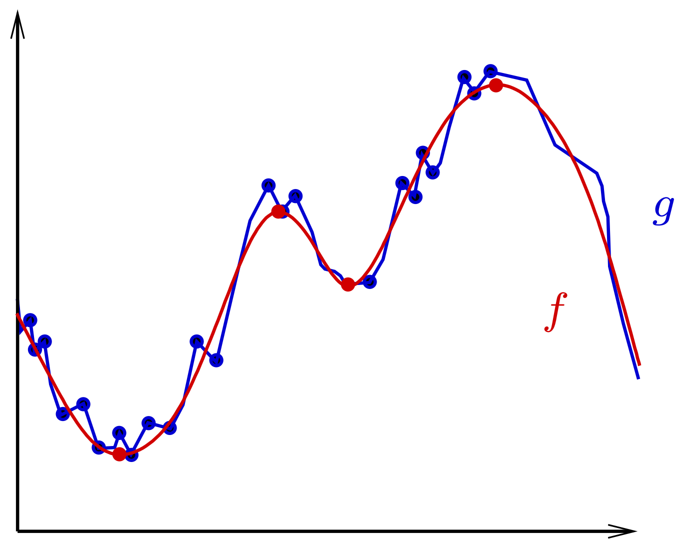


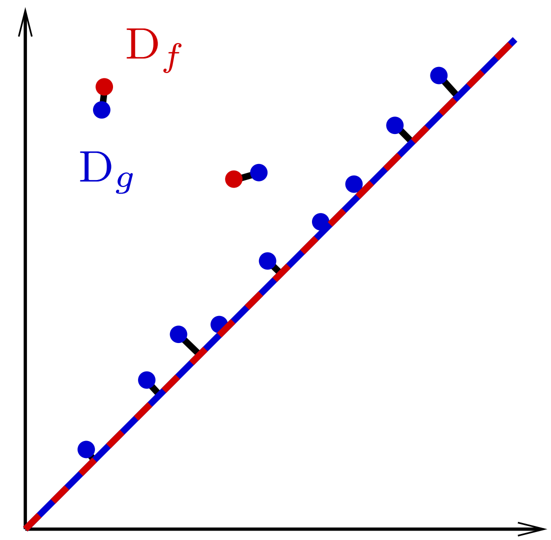
Definition. La *distance de Fréchet* entre les ensembles A and B est:

$$d_F(A,B) = \inf_{\gamma} \sup_{a} \|a - \gamma(a)\|_\infty$$

où a parcourt A et γ les bijections de A vers B.

Stabilité de la persistance

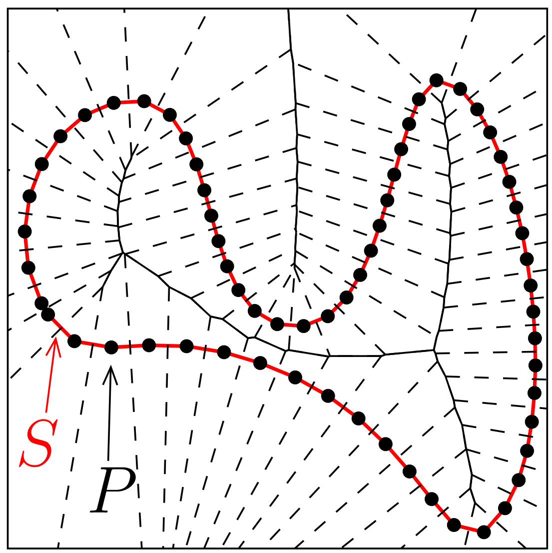


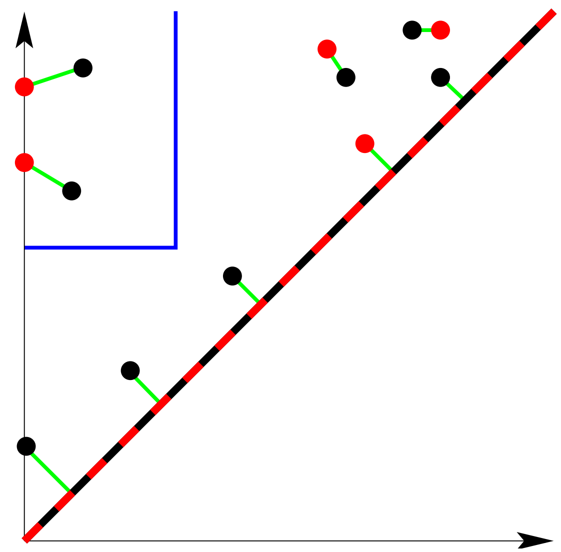


Théorème. *Si f et g sont deux fonctions continues et “tame” sur un espace finiment triangulable :*

$$d_F(\mathrm{D}_f, \mathrm{D}_g) \leq \|f - g\|_\infty$$

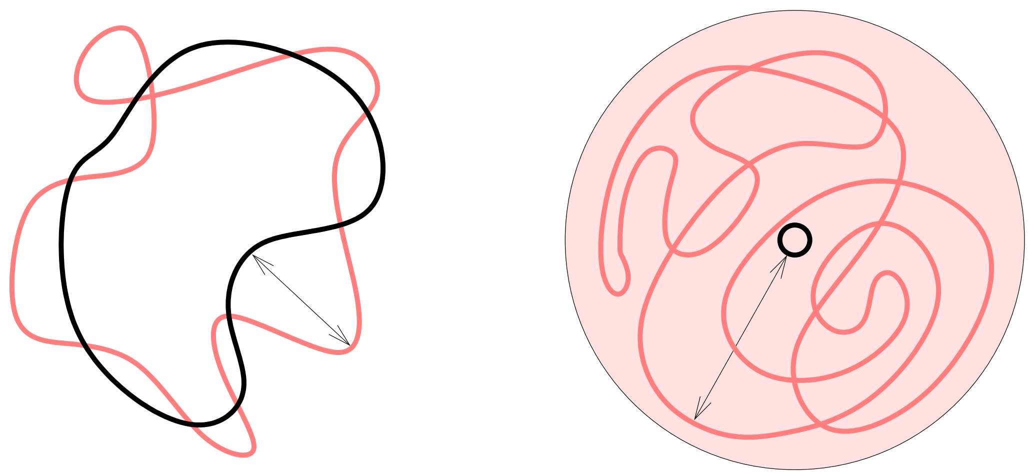
Estimation de l'homologie





- $||\text{dist}_S - \text{dist}_P||_\infty = d_H(S, P)$
- L'homologie de S se lit sur le diagramme de dist_S.
- Elle coincide avec des groupes d'homologie persistants de dist_P bien choisis : homologie à partir d'un échantillonnage.

Comparaison de longueurs

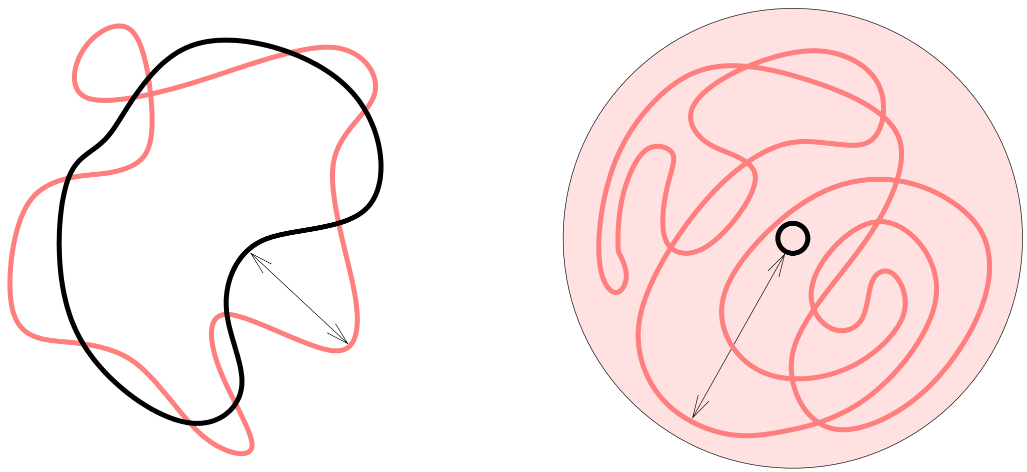


- Deux courbes proches ont elles des longueurs proches?
- Distance de Fréchet entre C_1 et C_2 :

$$d_F(C_1, C_2) = \inf_{\phi_1,\phi_2} \sup_s d(\phi_1(s), \phi_2(s))$$

où ϕ_i parcourt les paramétrisations de C_i.

Comparaison de longueurs

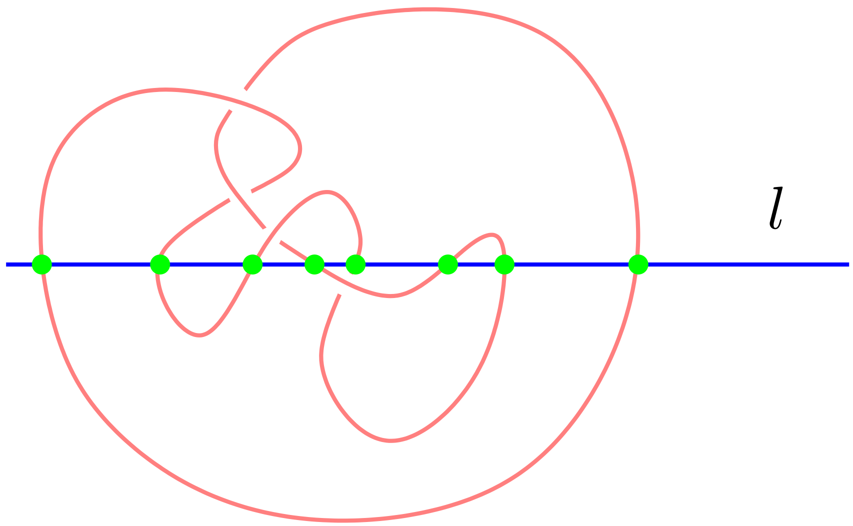


Théorème. *Soit* L_i *la longueur de* C_i*, et* K_i *l'intégrale de sa courbure.*

On a :

$$|L_1 - L_2| \leq \frac{2\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)}\left[K_1 + K_2 - 2\pi\right] d_F(C_1, C_2)$$

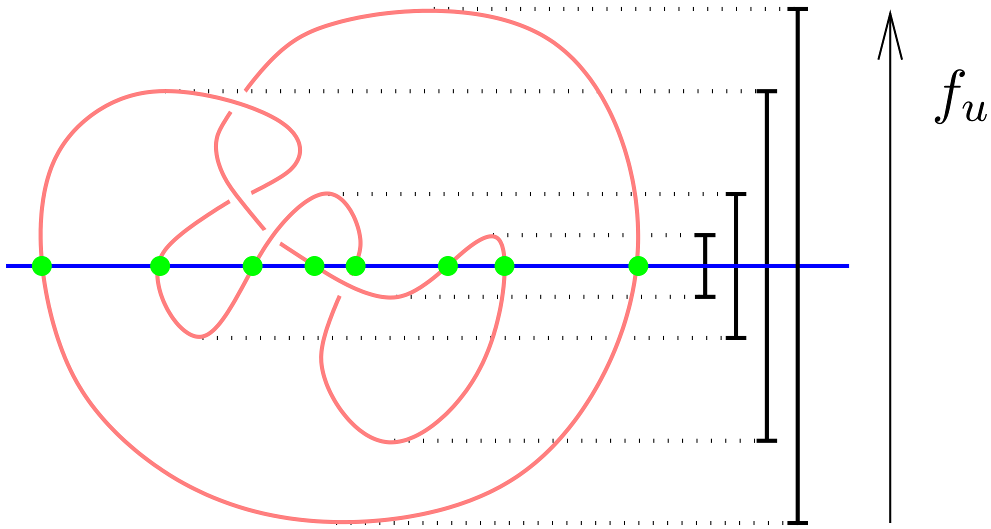
Preuve



- Formule de Crofton :

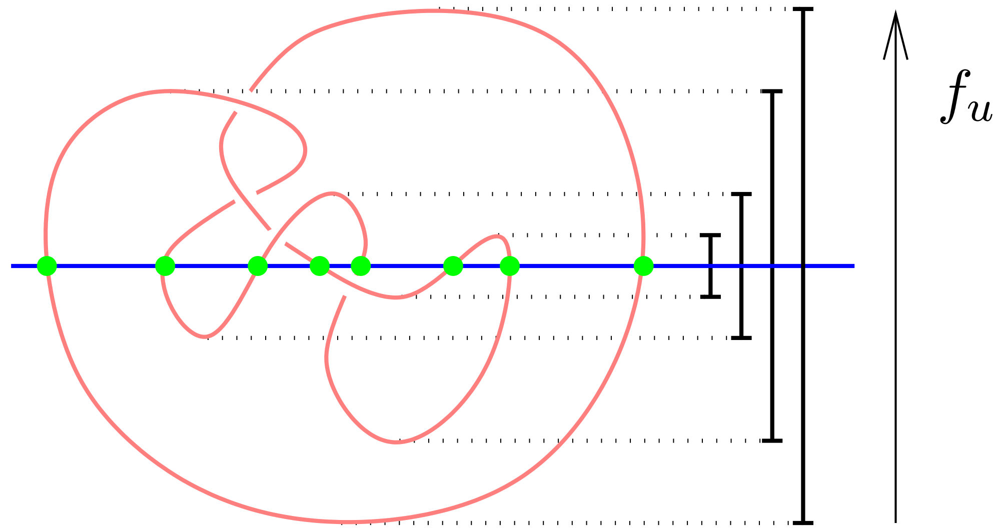
$$L(C) = \frac{\pi}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{\text{hyperplan } l \subset \mathbb{R}^n} \sharp(l \cap C)$$

Preuve



- Soit f^u le produit scalaire par u restreint à C.
- Si l est de normale u, $\sharp(l \cap C)$ est deux fois le nombre d'intervalles de persistance de f_u percés par l.

Preuve

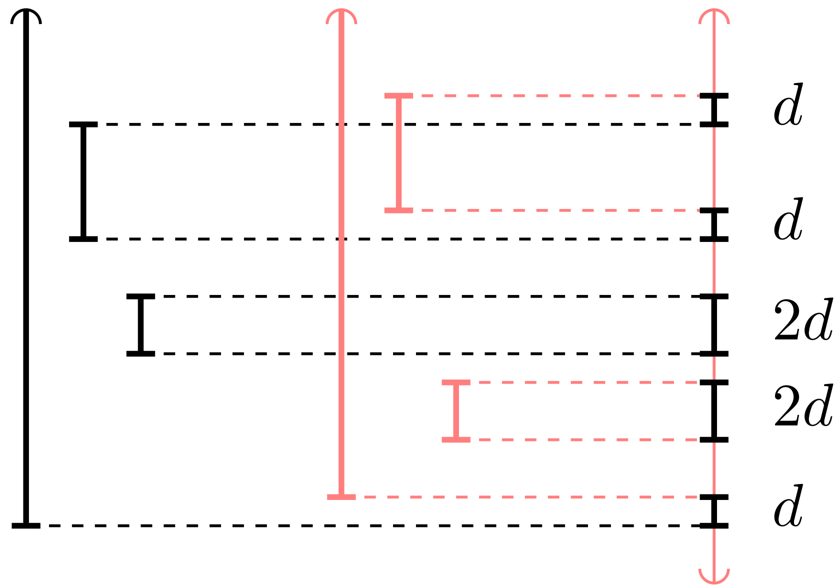


- Donc :

$$\int_{l \text{ hyperplan de normale } u} \sharp(l \cap C)$$

est la longueur totale des intervalles de persistance de f^u.

Preuve



- Théorème de stabilité : les extrémités des intervalles de persistance de f^u bougent de moins de $d_F(C_1, C_2) = d$.
- Donc la longueur totale des intervalles varie de moins de $2d(n_1^u + n_2^u)$, où n^u est le nombre de points critiques de f^u.

Preuve

- En intégrant sur toutes les directions :

$$|L_1 - L_2| \leq 2d \, \frac{\pi}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{u \in \mathbb{S}^n} n_1^u + n_2^u - 2 \, du$$

- Or l'intégrale du nombre de points critiques n_i^u sur $u \in \mathbb{S}^n$ est l'intégrale de la courbure de C_i divisé par $\pi/\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$ $\rightarrow$ cqfd.

Comparaison de courbures moyennes totales

Théorème. *Soit* $S_1 = \partial V_1$ *et* $S_2 = \partial V_2$ *deux surfaces fermées de* $\mathbb{R}^3$ *de même genre* g*. Soit* H_i *l'intégrale de la courbure moyenne de* S_i*, et* K_i *l'intégrale de la valeur absolue de sa courbure de Gauss.*

On a :

$$|H_1 - H_2| \leq [K_1 + K_2 - 4\pi(1+g)]\, d_F(V_1, V_2)$$

Conclusion

- La persistance est un codage robuste des “caractéristiques topologiques” d’une fonction réelle.

- Comment défi nir la persistance de fonctions à valeurs vectorielles?